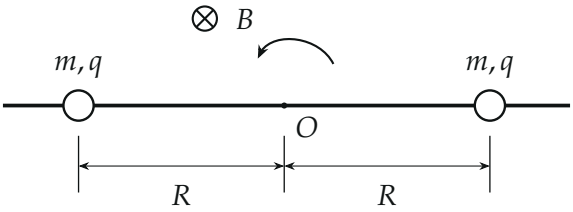
Бусинки на вращающемся стержне в магнитном поле

Задача 3. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 3] Две бусинки, каждая с положительным зарядом q и массой m, могут скользить без трения по жёсткому, непроводящему стержню. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией B и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (см. рис.). Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии R от оси O при двух значениях угловой скорости ω_1 и ω_2.

1. Найти заряд q, считая известными m, B, ω_1 и ω_2.
2. Найти R, считая известными m, B, ω_1 и ω_2.

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

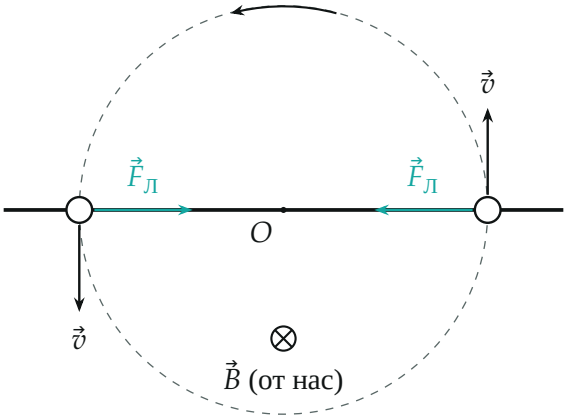


▲ **Решение. Что происходит.** В неподвижной системе отсчёта каждая бусинка движется по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω, поэтому её ускорение направлено к оси и равно $\omega^2 R$. Вдоль стержня на бусинку действуют кулоновское отталкивание от второй бусинки (наружу) и сила Лоренца (к оси при данном направлении вращения). Их сумма даёт центростремительное ускорение. Уравнение для q и R получается одно, но выполняется при двух значениях ω: это два уравнения с двумя неизвестными. Класс задачи — движение по окружности в магнитном поле с силой, зависящей от скорости.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — постоянная закона Кулона (в ответ для R она входит), $v = \omega R$ — скорость бусинки, ось r направлена вдоль стержня от бусинки к оси O (к центру окружности).

Пункт 1.

1. Направление силы Лоренца. Вращение — против часовой стрелки (стрелка на рисунке), поле направлено от нас. Правая бусинка движется вверх, и по правилу левой руки (или по формуле $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$) сила Лоренца направлена влево, к оси. Левая бусинка движется вниз, и сила направлена вправо — тоже к оси. Модуль $F_Л = qvB = q\omega RB$, потому что $\vec{v} \perp \vec{B}$.

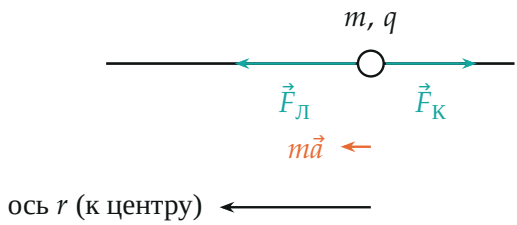


Вид сверху: скорости бусинок и силы Лоренца. Сила Лоренца у обеих бусинок направлена к оси O и перпендикулярна скорости.

2. Отсутствие силы со стороны стержня. Модуль скорости постоянен, значит тангенциального ускорения нет; сила Лоренца и кулоновская сила лежат вдоль стержня, то есть вдоль радиуса. Поперёк стержня (в плоскости вращения) остаётся только нормальная реакция стержня $\vec{N}$, и из условия «касательное ускорение равно нулю» следует $N = 0$. Сила тяжести по условию не учитывается, поэтому вдоль стержня действуют только две силы.

3. Расстояние и сила Кулона. Бусинки находятся на расстояниях R по разные стороны от оси, расстояние между ними $2R$, и кулоновская

сила отталкивания равна $F_К = \dfrac{kq^2}{(2R)^2} = \dfrac{kq^2}{4R^2}$; она направлена наружу, от другой бусинки.



Радиальные силы на бусинку при $\omega = \omega_1$: $F_Л > F_К$, их разность направлена к оси и равна $m\omega^2 R$. Нормальная реакция стержня равна нулю.

4. Второй закон Ньютона для бусинки в проекции на ось r (к центру): сила Лоренца — со знаком «плюс», сила Кулона — «минус»:

$$m\omega^2 R = q\omega RB - \frac{kq^2}{4R^2}.$$

Делим на R:

$$m\omega^2 = qB\omega - \frac{kq^2}{4R^3}. \qquad (1)$$

Равенство верно при $\omega = \omega_1$ и при $\omega = \omega_2$; q и R в обоих случаях одни и те же.

5. Исключаем R**.** Запишем (1) дважды и вычтем: слагаемое $\dfrac{kq^2}{4R^3}$ одинаково и сокращается.

$$m\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) = qB\left(\omega_1 - \omega_2\right).$$

Так как $\omega_1 \neq \omega_2$, сокращаем на $\omega_1 - \omega_2$: $m(\omega_1 + \omega_2) = qB$.

$$q = \frac{m(\omega_1 + \omega_2)}{B}.$$

Пункт 2.

6. Расстояние R**.** Подставим (1) при $\omega = \omega_1$: $\dfrac{kq^2}{4R^3} = qB\omega_1 - m\omega_1^2$. Так как $qB = m(\omega_1 + \omega_2)$, правая часть равна $m\omega_1(\omega_1 + \omega_2) - m\omega_1^2 = m\omega_1\omega_2$. Отсюда

$$R^3 = \frac{kq^2}{4m\,\omega_1\omega_2} = \frac{k\,m\,(\omega_1+\omega_2)^2}{4B^2\,\omega_1\omega_2}, \qquad R = \sqrt[3]{\frac{k\,m\,(\omega_1+\omega_2)^2}{4B^2\omega_1\omega_2}}.$$

Второй способ (теорема Виета). Уравнение (1) — квадратное относительно ω:

$$m\omega^2 - qB\,\omega + \frac{kq^2}{4R^3} = 0.$$

Значения ω_1 и ω_2 — его два корня. Сумма корней $\omega_1 + \omega_2 = \dfrac{qB}{m}$ дала q, произведение $\omega_1\omega_2 = \dfrac{kq^2}{4mR^3}$ даёт R. Результаты совпали с предыдущими.

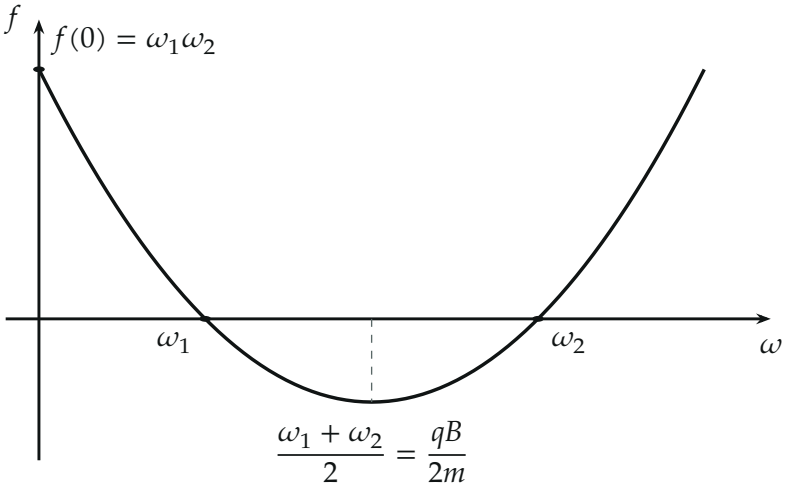
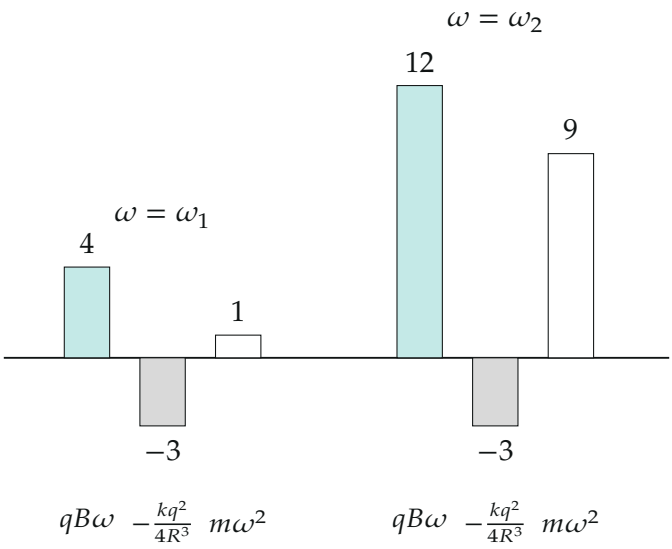


График $f(\omega) = m\omega^2 - qB\omega + \dfrac{kq^2}{4R^3}$ *(построен в единицах* $m = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$*). Нули функции — два допустимых значения угловой скорости; вершина параболы лежит посередине между ними, а* $f(0)$ *равно произведению корней, делённому на* m*.*



Радиальные силы, делённые на R, для чисел $m = B = k = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$ (тогда $q = 4$, $R^3 = 4/3$). Кулоновская часть в обоих случаях одна и та же (-3), а сила Лоренца растёт вместе с ω, поэтому равновесие возможно только при двух значениях ω, различающихся этой разностью.

Обратите внимание. Расстояние между бусинками равно $2R$, а не R: кулоновская сила — $kq^2/(4R^2)$. При обратном вращении сила Лоренца была бы направлена наружу, как и кулоновская, и равновесия не было бы: направление силы Лоренца нужно определять по рисунку условия (вращение против часовой стрелки, поле от нас).

Проверка. Размерность: $m\omega/B$ — заряд, так как 1 Тл = кг/(Кл · с); $kq^2/(m\omega^2)$ — $\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}/\text{с}^2} = \text{м}^3$. Предел: при $R \to \infty$ кулоновская сила исчезает, и (1) даёт $\omega = 0$ или $\omega = qB/m$; при $\omega_1 \to 0$ формула даёт $q = m\omega_2/B$, то есть ω_2 — циклотронная частота, как и должно быть без других сил. Численно: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $m = B = k = 1$ дают $q = 4$, $R^3 = 4/3$, и оба уравнения (1) выполняются ($1 = 4 - 3$, $9 = 12 - 3$). Смысл: сила Лоренца помогает бусинке держаться на окружности, кулоновская мешает, а их разность задаёт центростремительное ускорение.

Ответ. 1) $q = \dfrac{m(\omega_1 + \omega_2)}{B}$; 2) $R = \sqrt[3]{\dfrac{k\,m\,(\omega_1 + \omega_2)^2}{4\omega_1\omega_2 B^2}}$.