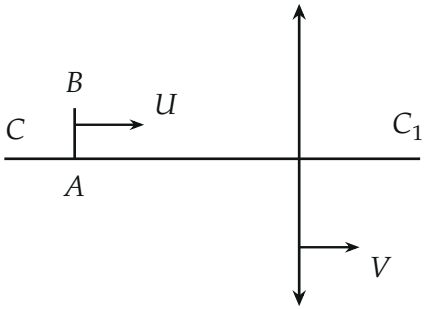
Движущаяся линза и движущийся стержень

Задача 5. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 5] Линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см движется со скоростью $V = 1$ мм/с (см. рис.). Стержень AB длиной $h = 1$ см, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы CC_1, движется со скоростью $U = 3V/2$. Все движения поступательные вдоль главной оптической оси линзы. В некоторый момент стержень находится на расстоянии $d = 3F/2$ от линзы.

1. На каком расстоянии от линзы будет изображение стержня в этот момент?
2. Какой длины будет изображение стержня в этот момент?
3. С какой скоростью будет двигаться изображение точки A стержня в этот момент?



▲ **Решение. Что происходит.** Стержень находится между фокусом и двойным фокусом ($F < d < 2F$), поэтому линза даёт его действительное перевёрнутое увеличенное изображение. Положение и размер находятся по формуле тонкой линзы и по увеличению. Скорость изображения ищем в системе отсчёта линзы: в ней линза неподвижна, формула линзы применима прямо, а её производная по времени даёт скорость изображения относительно линзы. Потом возвращаемся в неподвижную систему добавлением скорости линзы. Класс задачи — движущиеся линза и предмет, переход в систему отсчёта линзы.

Обозначения. Ось x направлена вдоль главной оптической оси вправо, как $\vec{V}$ и $\vec{U}$ на рисунке. d — расстояние от стержня до линзы, f — от

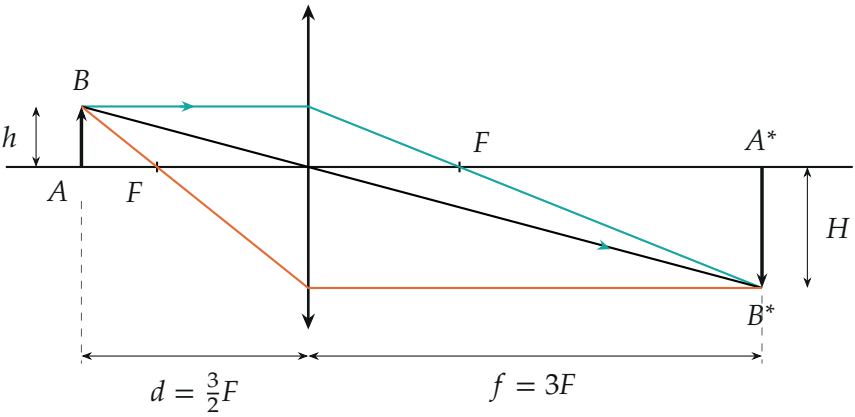
линзы до изображения, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение; $F = 20$ см$=$ 200 мм.

Пункт 1.

1. Расстояние до изображения. Запишем формулу тонкой линзы для действительного изображения, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, и выразим f:

$$f = \frac{dF}{d-F} = \frac{\frac{3}{2}F \cdot F}{\frac{3}{2}F - F} = 3F = 60 \text{ см}.$$

Так как $f > 0$, изображение действительное и находится по другую сторону от линзы, чем стержень.



Три луча от точки B: параллельный оси (бирюзовый) идёт после линзы через правый фокус; идущий через левый фокус (оранжевый) выходит параллельно оси; луч через центр линзы (чёрный) не преломляется. Все три пересекаются в B. Поперёк оси масштаб крупнее, чем вдоль.*

Пункт 2.

2. Длина изображения. Поперечное увеличение $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{3F}{3F/2} = 2$. Из подобия треугольников на рисунке луча через центр линзы $H/h = f/d$, поэтому

$$H = \Gamma h = 2h = 2 \text{ см}.$$

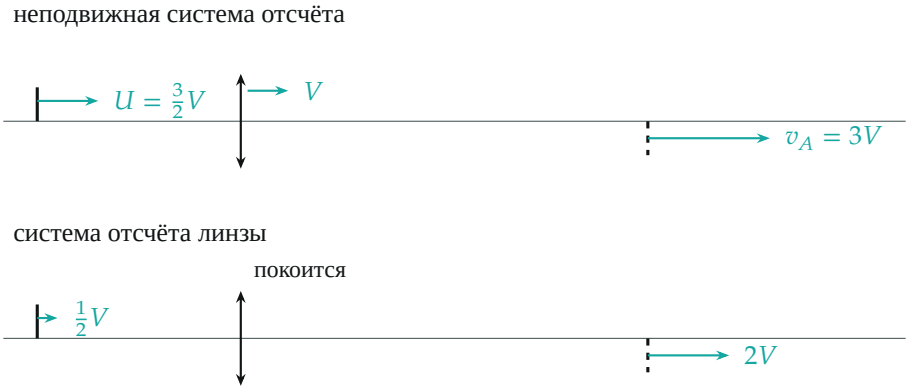
Изображение перевёрнуто: точка A остаётся на оси, а точка B^* лежит под осью.

Пункт 3.

3. Система отсчёта линзы. В неподвижной системе отсчёта двигаются и линза, и стержень, и расстояние d меняется из-за обоих движений. Перейдём в систему, связанную с линзой: в ней линза неподвижна, а стержень движется со скоростью

$$U_{\text{отн}} = U - V = \frac{3}{2}V - V = \frac{1}{2}V$$

вправо, то есть к линзе. Значит, d убывает: $d' = -\dfrac{V}{2}$.



Скорости (длина стрелок пропорциональна скорости). В неподвижной системе: линза V, стержень $\frac{3}{2}V$, изображение точки A — искомая v_A. В системе линзы: стержень $\frac{1}{2}V$, изображение $2V$.

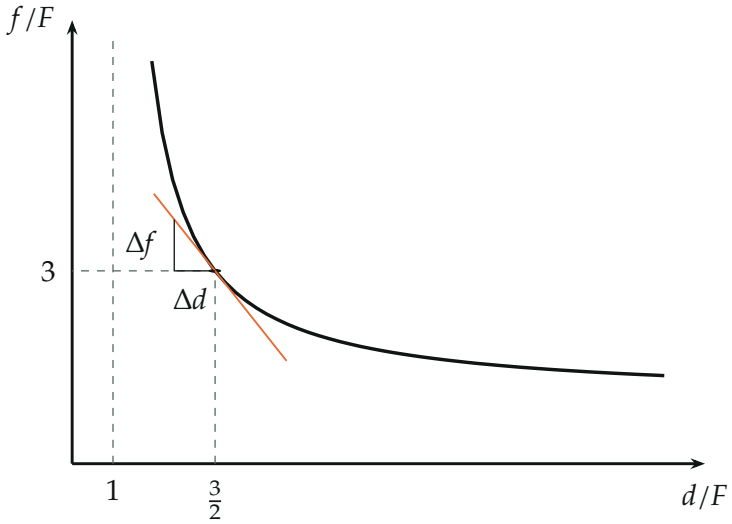
4. Производная формулы линзы. Продифференцируем $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$ по времени, $F = \text{const}$ (производная сложной функции: $(1/d)' = -d'/d^2$):

$$-\frac{d'}{d^2} - \frac{f'}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = -\frac{f^2}{d^2}\,d' = -\Gamma^2 d'.$$

При $d' = -\dfrac{V}{2}$ и $\Gamma = 2$

$$f' = \Gamma^2 \cdot \frac{V}{2} = 4 \cdot \frac{V}{2} = 2V.$$

Знак «плюс»: расстояние f растёт, изображение точки A удаляется от линзы вправо со скоростью $2V$ относительно линзы.

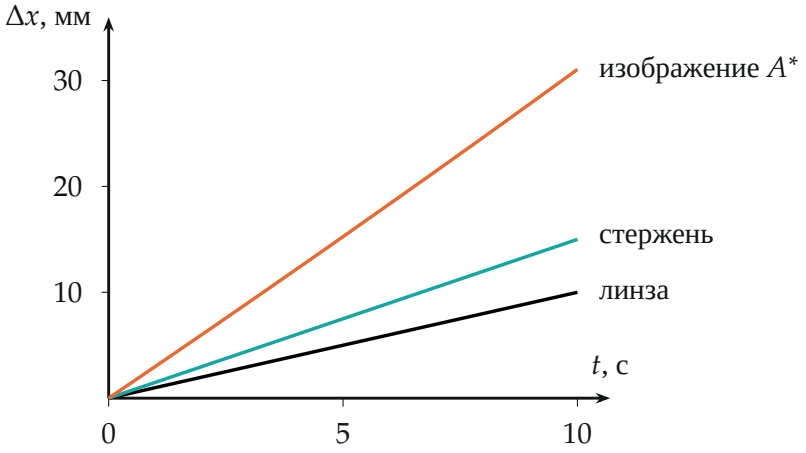


Зависимость $f(d)$ в единицах F. В точке $d = \frac{3}{2}F$ касательная (прямая) имеет наклон $-\Gamma^2 = -4$: при сдвиге стержня к линзе на малое Δd (по горизонтали) изображение уходит от линзы на $4\Delta d$ (по вертикали).

5. Скорость в неподвижной системе. Скорость изображения точки A равна сумме скорости линзы и скорости изображения относительно линзы (закон сложения скоростей):

$$v_A = V + f' = V + 2V = 3V = 3 \text{ мм/с}.$$

Вправо, в ту же сторону, что и линза.



Смещения от момента в условии: линза ($V = 1$ мм/с), стержень ($1{,}5V$) и изображение точки A (по формуле линзы). Наклон графика изображения в начале — 3 мм/с; небольшой изгиб связан с тем, что f зависит от d нелинейно.

Обратите внимание. Множитель Γ^2, а не Γ: продольное увеличение квадратично, потому что f зависит от d как гипербола. И нельзя забывать о скорости самой линзы: $2V$ — скорость изображения относительно линзы, а не в неподвижной системе.

Проверка. Размерность: f и H — длины, v_A — скорость. Предел: если $U = V$ (стержень неподвижен относительно линзы), то $d' = 0, f' = 0$, и изображение движется вместе с линзой со скоростью V; общая формула $v_A = V + \Gamma^2(U - V)$ даёт именно это. При $d = 2F$ ($\Gamma = 1$) получаем $f' = -d'$: суммарное расстояние $d + f = 4F$ минимально, и изменение d и f равно по модулю — как и должно быть. Численно: за 1 с $d = 299{,}5$ мм, $f = \dfrac{200 \cdot 299{,}5}{99{,}5} \approx 602{,}0$ мм; изображение сместилось относительно линзы на 2,0 мм, линза сместилась на 1 мм, итого $\approx 3{,}0$ мм. Смысл: изображение движется втрое быстрее линзы, потому что стержень при $\Gamma = 2$ «подталкивает» его с продольным увеличением 4.

Ответ. 1) $f = 3F = 60$ см; 2) $H = 2h = 2$ см; 3) $v_A = 3V = 3$ мм/с.