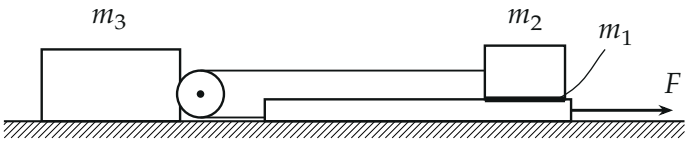
Три бруска, нить и блок: скреплённые и скользящие

Задача 1. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 1] Систему из трёх брусков, находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая горизонтальную силу F (см. рис.). Коэффициент трения между столом и брусками и между соприкасающимися брусками m_1 и m_2 равен μ. Массы брусков $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$. Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

1. Найти силу натяжения нити, если бруски m_1 и m_2 скрепить, а параметры F, m, μ подобрать такими, чтобы бруски двигались по столу как одно целое.
2. Найти силу натяжения нити, если параметры F, m, μ подобраны так, что нескреплённые бруски m_1 и m_2 движутся друг по другу, а бруски m_1 и m_3 по столу.



▲ **Решение. Что происходит.** Блок закреплён на бруске m_3, а нить перекинута через него: один её конец привязан к m_2, другой к m_1. Нить тянет блок, а вместе с ним и m_3, вправо двумя участками, то есть силой $2T$, а бруски m_2 и m_1 тянет назад, каждый силой T. В пункте 1 все три тела движутся с одним ускорением: хватает второго закона Ньютона для всей системы и для m_3. В пункте 2 ускорения разные, но нить нерастяжима и это связывает их; добавляется трение между m_1 и m_2.

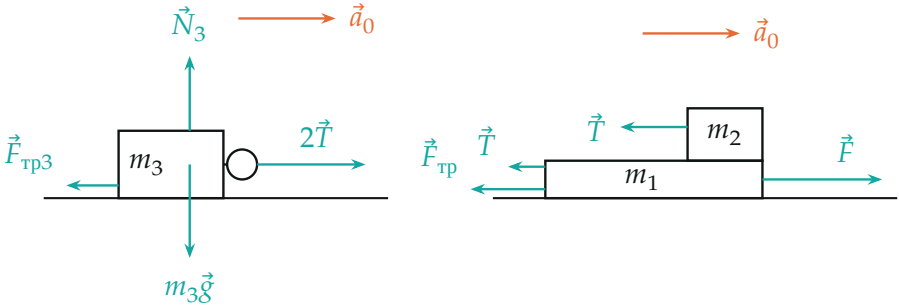
Обозначения. Ось x направлена вправо вдоль стола. T — сила натяжения нити, a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений брусков на ось x (блок и m_3 едут вместе), N — силы реакции опоры.

Пункт 1.

1. Вся система. Нить и блок — внутренние части системы, поэтому горизонтально на неё действуют только сила F и трение стола. Бруски

m_1 и m_2 скреплены, давят на стол всем весом, и трение скольжения на все три бруска равно $\mu(m_1+m_2+m_3)g = 6\mu mg$. Второй закон Ньютона для системы из трёх брусков в проекции на ось x:

$$F - 6\mu mg = 6m\,a_0.$$



брусок m_3 с блоком — скреплённые m_1 и m_2

Горизонтальные силы в пункте 1 (вертикальные для m_1, m_2 не показаны): на m_3 с блоком действует $2T$, на скреплённые бруски — F, две силы T и трение стола.

2. Брусок m_3 с блоком. Эту часть системы выбираем потому, что на неё нить действует в одной точке и сразу двумя участками: невесомый блок, не имеющий трения в оси, передаёт на ось силу $2T$. Для m_3 с блоком в проекции на ось x:

$$2T - \mu m_3 g = m_3 a_0, \qquad 2T - 3\mu mg = 3m\,a_0.$$

3. Исключаем a_0. Из первого пункта $6m\,a_0 = F - 6\mu mg$, значит $3m\,a_0 = \dfrac{F}{2} - 3\mu mg$. Подставляем:

$$2T - 3\mu mg = \frac{F}{2} - 3\mu mg \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{F}{4}.$$

Тот же результат получается без общего уравнения. Для скреплённых m_1, m_2 (масса $3m$) сила нити действует дважды: $F - 2T - 3\mu mg = 3m\,a_0$.

Вычитая из него уравнение для m_3, находим $F-4T=0$. Смысл: у обеих частей системы одинаковые масса $3m$ и трение $3\mu mg$, поэтому они делят силу F пополам, и силе $F/2$ у m_3 соответствует $2T$.

Пункт 2.

4. Связь ускорений. Длина нити постоянна: она складывается из участка от блока до m_2, участка от блока до левого конца m_1 и полуокружности на блоке. Пусть x_b, x_1, x_2 — координаты блока, левого конца m_1 и бруска m_2. Тогда $(x_2-x_b)+(x_1-x_b)=\text{const}$ (участки нити постоянной длины уходят в константу). За малое время dt

$$dx_1+dx_2=2\,dx_b, \qquad \text{то есть} \qquad a_1+a_2=2a_3.$$

Обозначим $a_1=a_3+a$, $a_2=a_3-a$. Нить тянет m_2 влево, поэтому m_2 скользит по m_1 влево, и $a>0$.

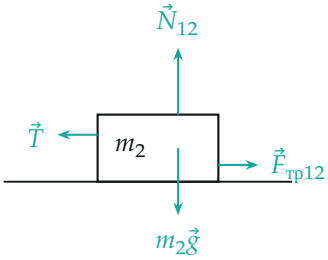
блок $\longrightarrow dx_b$

конец $m_1 \longrightarrow dx_1=dx_b+dx$

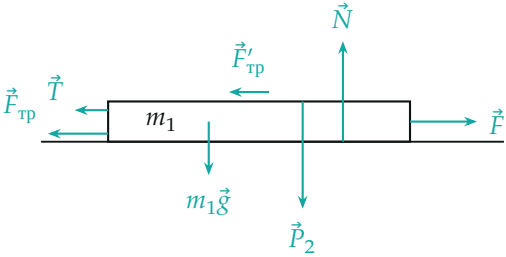
$m_2 \longrightarrow dx_2=dx_b-dx$

Смещения за малое время: концы нити отходят от блока в противоположные стороны на dx, поэтому смещения m_1 и m_2 отличаются от смещения блока на $+dx$ и $-dx$.

5. Силы трения. Запишем их, учитывая, кто на кого давит. Бруски скользят, поэтому каждое трение — скольжения. На стол давят m_1 и m_2, значит $N=(m_1+m_2)g=3mg$ и трение стола на m_1 равно $3\mu mg$ (влево). Брусок m_2 скользит влево по m_1, и трение на него со стороны m_1 направлено вправо: $\mu m_2 g=\mu mg$; на m_1 со стороны m_2 действует такая же по модулю сила влево (третий закон Ньютона). На m_3 трение равно $3\mu mg$.



брусок m_2



брусок m_1

Силы на m_2 и m_1 (бирюзовые). $\vec{P}_2$ — давление m_2 на m_1, $\vec{F}'_{тр}$ — трение на m_1 со стороны m_2, $\vec{F}_{тр}$ — трение стола. Длины стрелок примерно по модулю.

6. Второй закон Ньютона для каждого бруска (горизонтальные проекции; $m_1 = 2m$, $m_2 = m$):

$$\begin{aligned} m_1: &\quad F - T - 3\mu mg - \mu mg = 2m(a_3 + a), \\ m_2: &\quad -T + \mu mg = m(a_3 - a), \\ m_3 \text{ с блоком}: &\quad 2T - 3\mu mg = 3m\,a_3. \end{aligned}$$

Неизвестных три: T, a, a_3; нужна только T. Разделим первое уравнение на $2m$ и сложим со вторым, делённым на m: a уходит.

$$\frac{F - T - 4\mu mg}{2m} + \frac{\mu mg - T}{m} = 2a_3 \quad \Rightarrow \quad F - 3T - 2\mu mg = 4m\,a_3.$$

Из третьего уравнения $4m\,a_3 = \dfrac{8T - 12\mu mg}{3}$. Подставляем и сокращаем:

$$3F - 9T - 6\mu mg = 8T - 12\mu mg \quad \Rightarrow \quad 17\,T = 3F + 6\mu mg.$$

$$T = \frac{3}{17}\,(F + 2\mu mg)\,.$$

7. Когда применим каждый случай. Вычтем из первого уравнения (делённого на $2m$) второе (делённое на m): получим $4m\,a = F + T - 6\mu mg$,

откуда

$$a = \frac{5F - 24\mu mg}{17\,m}, \qquad a_3 = \frac{2F - 13\mu mg}{17\,m}, \qquad a_1 = \frac{7F - 37\mu mg}{17\,m}.$$

Скольжение m_2 по m_1 ($a > 0$) начинается при $F > \frac{24}{5}\mu mg$, ускорение m_1 положительно при $F > \frac{37}{7}\mu mg$. Самое жёсткое условие — движение m_3 ($a_3 > 0$): оно требует

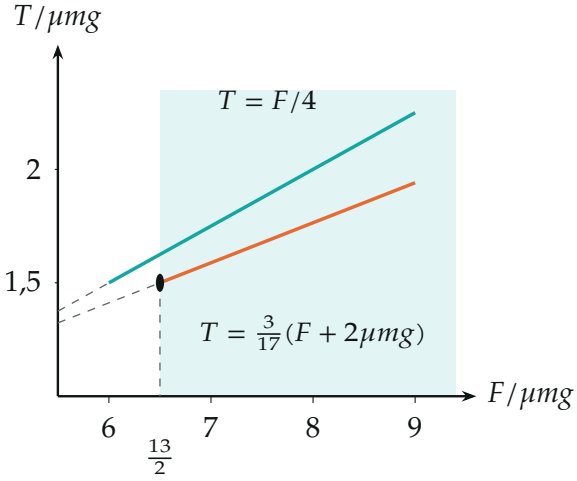
$$F > \frac{13}{2}\,\mu mg,$$

и только тогда верно условие задачи «m_1 и m_3 движутся по столу». Смысл границы: m_3 трогается, когда сила $2T$ превосходит трение $3\mu mg$, то есть при $T = \frac{3}{2}\mu mg$; формула $T = \frac{3}{17}(F + 2\mu mg)$ при $F = \frac{13}{2}\mu mg$ именно это и даёт. Ускорение $a_2 = a_3 - a = \dfrac{11\mu mg - 3F}{17m}$ при таких F отрицательно: m_2 уезжает влево, куда его тянет нить.

В пункте 1 бруски скреплены, и формула $T_0 = F/4$ верна при любой $F > 6\mu mg$ (при меньшей силе вся система стоит). Если бы m_1 и m_2 не скрепили и они ехали вместе, трение покоя на m_2 было бы

$$f = T_0 + m_2 a_0 = \frac{5F}{12} - \mu mg,$$

а требование $f \le \mu m_2 g = \mu mg$ даёт $F \le \frac{24}{5}\mu mg$, то есть меньше $6\mu mg$, когда система вообще движется. Значит, нескреплённые бруски при движении системы всегда скользят друг по другу, и два случая задачи не сшиваются: при $F = \frac{13}{2}\mu mg$ получается $T = \frac{3}{2}\mu mg$ в пункте 2 и $T_0 = \frac{13}{8}\mu mg$ в пункте 1.



Сила натяжения нити. Бирюзовая линия — пункт 1 ($F > 6\mu mg$), оранжевая — пункт 2 ($F > \frac{13}{2}\mu mg$, закрашено); серый пунктир — продолжения формул за пределы применимости. Ось T начата с единицы; линии пересекаются при $F = \frac{24}{5}\mu mg$, вне области задачи.

Обратите внимание. Блок стоит на m_3, а не на неподвижной оси: нить действует на него двумя участками, и m_3 тянет вправо сила $2T$, а не T. Давление на стол у m_1 создаёт и m_2, поэтому трение стола — $3\mu mg$, а не μmg; у m_1 есть ещё второе трение — со стороны скользящего m_2. Ускорения брусков в пункте 2 не равны: $a_1 \neq a_2$, связь даёт лишь $a_1 + a_2 = 2a_3$.

Проверка. Размерность: T и F — силы, μmg — тоже сила. Граница $F = \frac{13}{2}\mu mg$ получилась двумя способами: из условия $a_3 = 0$ в системе уравнений и из условия $2T = 3\mu mg$ (нить едва стронула m_3), и оба дают $T = \frac{3}{2}\mu mg$. Подстановка $F = 8\mu mg$ в линейную систему шага 6 даёт $T = \frac{30}{17}\mu mg$, $a = \frac{16}{17}\mu g$, $a_3 = \frac{3}{17}\mu g$, $a_1 = \frac{19}{17}\mu g$, $a_2 = -\frac{13}{17}\mu g$, и все три уравнения выполняются; связь $a_1 + a_2 = 2a_3$ тоже. Смысл: в пункте 1 нить передаёт четверть силы F независимо от трения, а в пункте 2 натяжение растёт с F медленнее (наклон $\frac{3}{17}$ вместо $\frac{1}{4}$): часть силы уходит на трение скольжения между m_1 и m_2.

Ответ. 1) $T_0 = \dfrac{F}{4}$; 2) $T = \dfrac{3}{17}(F + 2\mu mg)$.