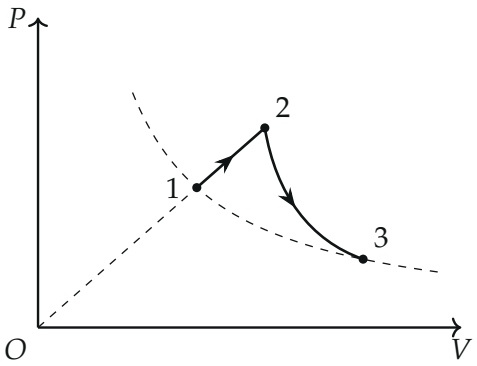
Гелий: работы и теплоёмкость в двух процессах

Задача 2. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 3–4, задача 2] Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью. Работа, совершённая газом в процессе 2–3, в 2 раза больше количества теплоты, полученной газом в процессе 1–2. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

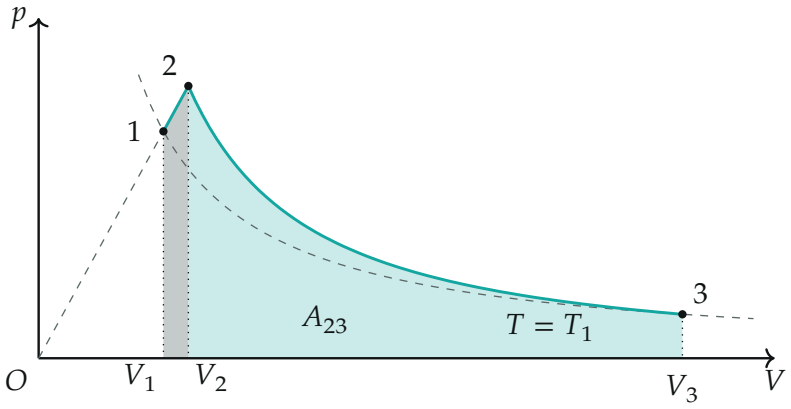
1. Найти отношение работ, совершённых газом в процессах 2–3 и 1–2.
2. Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3.



▲ **Решение. Что происходит.** Гелий — одноатомный идеальный газ: $pV = \nu RT$ и внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT$. На участке 1–2 давление пропорционально объёму, $p = \alpha V$, поэтому $pV = \alpha V^2$ растёт: газ расширяется и нагревается. На участке 2–3 теплоёмкость постоянна, значит, теплота и изменение температуры связаны простой формулой $Q = \nu C\,\Delta T$. Это задача на первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$, записанный для каждого участка. Чтобы не плодить букв, все величины выразим через одну — $\nu R\,\Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$: тогда условия «$A_{23} = 2Q_{12}$» и «$T_3 = T_1$» сразу дадут ответы.

Обозначения. A — работа газа, Q — полученная газом теплота, ΔU — изменение внутренней энергии (с индексом участка); $T_3 = T_1$.

Качественная картина. Сначала газ идёт по прямой вверх и вправо: объём растёт, температура растёт. Потом он расширяется дальше, но давление падает так круто, что температура снова уменьшается и в точке 3 становится прежней, как в точке 1 (пунктирная гипербола — изотерма $T = T_1$). Рисунок построен для $T_2 = 1{,}44\,T_1$; ответы от этого числа не зависят.



Процесс 1–2–3. Серым — работа A_{12}, бирюзовым — работа A_{23} (площади под графиком). Пунктиром: прямая $p \propto V$ через O и изотерма $T = T_1$.

Пункт 1.

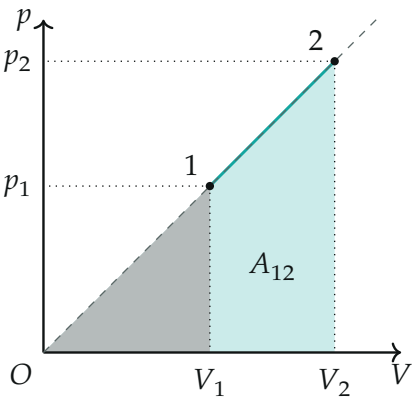
1. Работа на участке 1–2. Работа газа численно равна площади под графиком в координатах p–V. Под прямой $p = \alpha V$ лежит трапеция, и её площадь найдём двумя способами. Первый — по формуле трапеции:

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}\,(V_2 - V_1) = \frac{\alpha(V_1 + V_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{1}{2}\,(p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Второй — вычитанием площадей двух прямоугольных треугольников с вершиной в точке O (рисунок): $\frac{1}{2}p_2V_2$ минус $\frac{1}{2}p_1V_1$. Результаты совпали. Теперь $pV = \nu RT$ для каждого состояния:

$$A_{12} = \frac{1}{2}\,\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

Формула верна только для процесса, где $p \propto V$: именно тогда площадь под графиком состоит из треугольников с вершиной в O.



Работа на участке 1–2: от бирюзового треугольника $\frac{1}{2}p_2V_2$ (вместе с серым) отнимаем серый $\frac{1}{2}p_1V_1$; остаётся трапеция A_{12}.

2. Теплота на участке 1–2. Запишем первый закон термодинамики для газа между состояниями 1 и 2: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$. Внутренняя энергия гелия $\frac{3}{2}\nu RT$, поэтому $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$. Отсюда

$$Q_{12} = \frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T + \frac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T = 2\,\nu R\,\Delta T.$$

Знак «плюс»: газ получает теплоту — и нагревается, и совершает работу.

3. Работа на участке 2–3 и первый ответ. По условию $A_{23} = 2Q_{12} = 4\,\nu R\,\Delta T$. Тогда

$$\frac{A_{23}}{A_{12}} = \frac{4\,\nu R\,\Delta T}{\frac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T} = 8.$$

Пункт 2.

4. Что стало с газом на участке 2–3. Температура в конце равна $T_3 = T_1$, значит, за участок она изменилась на $T_3 - T_2 = -\Delta T$: газ остыл. Внутренняя энергия уменьшилась:

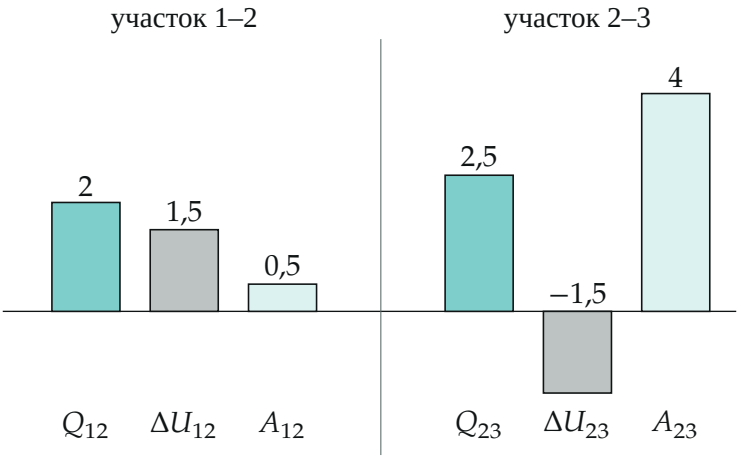
$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\,\nu R\,(T_3 - T_2) = -\frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

5. Теплота на участке 2–3. Запишем первый закон термодинамики

для газа между состояниями 2 и 3: $Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23}$. Подставим найденное:

$$Q_{23} = -\frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T + 4\,\nu R\,\Delta T = \frac{5}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

Знак «плюс»: газ в действительности *получает* теплоту, хотя и остывает. Работа расширения велика — 4 в наших единицах, а убыль внутренней энергии может отдать на неё лишь $\frac{3}{2}$. Недостающие $\frac{5}{2}$ приходят теплотой (столбики на рисунке: $Q = \Delta U + A$).



Баланс энергии на каждом участке в единицах $\nu R\,\Delta T$: $Q = \Delta U + A$. Справа $-\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$.

6. Молярная теплоёмкость. По определению молярной теплоёмкости для участка 2–3 $Q_{23} = \nu C\,(T_3 - T_2)$, то есть

$$\frac{5}{2}\,\nu R\,\Delta T = \nu C\,(-\Delta T) \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{5}{2}\,R.$$

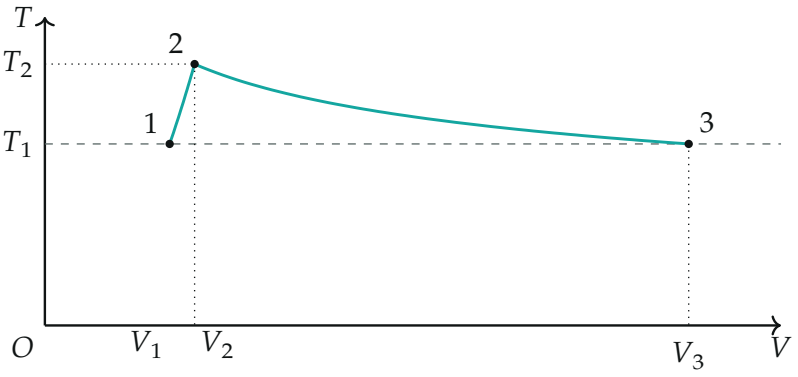
Обратите внимание: отрицательная теплоёмкость — не ошибка. Она означает, что газ *получает* теплоту ($Q_{23} > 0$) при *понижении* температуры ($\Delta T_{23} < 0$): отношение этих величин отрицательно. Для такого процесса работа больше убыли внутренней энергии.

Проверка. Размерность: C — в тех же единицах, что и R, Дж/(моль·К); отношение работ — число. Второй способ для Q_{23}, не использующий

шагов 4 и 5. Состояния 1 и 3 имеют одну температуру, значит, на всём пути $1 \to 3$ внутренняя энергия не изменилась, и первый закон для всего пути даёт $Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + A_{23}$. Отсюда

$$Q_{23} = \left(\frac{1}{2} + 4 - 2\right)\nu R\,\Delta T = \frac{5}{2}\,\nu R\,\Delta T,$$

как и в шаге 5. Третий способ — по политропе. Для процесса с постоянной теплоёмкостью C показатель n в уравнении $pV^n = \text{const}$ равен $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V} = \dfrac{-\frac{5}{2}R - \frac{5}{2}R}{-\frac{5}{2}R - \frac{3}{2}R} = \dfrac{5}{4}$, а работа расширения по такой политропе $A = \dfrac{\nu R\,(T_2 - T_3)}{n - 1} = \dfrac{\nu R\,\Delta T}{1/4} = 4\,\nu R\,\Delta T$ — столько же, сколько мы взяли из условия. Всё сошлось. Температура вдоль $2 \to 3$ убывает как $T \propto V^{-1/4}$ (рисунок): газ нагрелся на $1 \to 2$ и остывает на $2 \to 3$, и именно поэтому знаки в шагах 4 и 5 такие, какие есть. Физический смысл: на участке 2–3 газ совершает работу больше, чем теряет внутренней энергии; разницу покрывает подведённое тепло, поэтому газ получает теплоту, остывая, — теплоёмкость такого процесса отрицательна.



Температура вдоль процесса ($T_2 = 1{,}44\,T_1$): на участке 1–2 $T \propto V^2$ (растёт), на участке 2–3 $T \propto V^{-1/4}$ (убывает до T_1).

Ответ. 1) $\dfrac{A_{23}}{A_{12}} = 8$; 2) $C = -\dfrac{5}{2}R$.