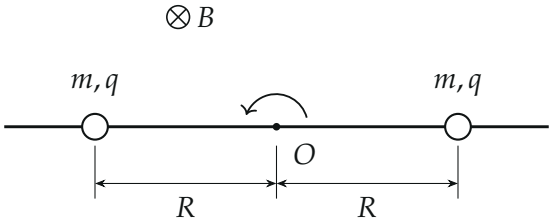
Бусинки на вращающемся стержне: два заряда

Задача 3. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 3–4, задача 3] Две бусинки, каждая с положительным зарядом q и массой m, могут скользить без трения по жёсткому, непроводящему стержню. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией B и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (см. рис.). Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии R от оси O при двух значениях заряда q, равных q_1 и q_2.

1. Найти ω, считая известными m, R, q_1 и q_2.
2. Найти B, считая известными m, R, q_1 и q_2.

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.



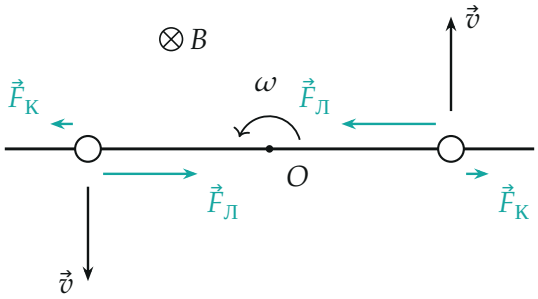
▲ **Решение. Что происходит.** Бусинки покоятся относительно стержня, значит, каждая движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью $v = \omega R$, и её ускорение — центростремительное, $\omega^2 R$, направленное к оси O. Радиальных сил две: сила Кулона от соседней бусинки (отталкивание, наружу) и сила Лоренца (при показанных на рисунке направлениях поля и вращения — к оси). Стержень гладкий и непроводящий, он может действовать только поперёк себя, а все остальные силы лежат вдоль него, поэтому поперечной силы нет и реакция стержня равна нулю. Главная идея: уравнение движения бусинки — *квадратное* относительно заряда q, а в условии сказано, что подходят *два* значения q_1 и q_2. Значит, это два корня одного квадратного уравнения, и теорема Виета даёт ω и B сразу.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — постоянная в законе Кулона. Система отсчёта — неподвижная (лабораторная): в ней нет ни центробежной силы, ни силы Кориолиса, только настоящие силы. Ось направим от бусинки к O: тогда ускорение $\omega^2 R$ имеет положительную проекцию.

Откуда берутся силы. Бусинки находятся на расстоянии $R + R = 2R$ друг от друга, поэтому кулоновская сила на каждую

$$F_К = \frac{kq^2}{(2R)^2} = \frac{kq^2}{4R^2},$$

направленная от соседней бусинки, то есть от O. Сила Лоренца $\vec{F}_Л = q\,\vec{v}\times\vec{B}$. Правая бусинка при вращении против часовой стрелки движется вверх, поле направлено от нас: векторное произведение направленной вверх скорости на направленное от нас поле даёт вектор, направленный к O. Модуль $F_Л = q\,\omega R\,B$, потому что $\vec{v} \perp \vec{B}$. У левой бусинки скорость противоположна, и сила Лоренца тоже направлена к O (рисунок).



Силы в плоскости вращения: $\vec{F}_Л$ — к оси, $\vec{F}_К$ — от оси; у правой и левой бусинок картина зеркальна. Длины стрелок — по расчёту для $q = q_1$ (см. пример ниже).

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для бусинки. Запишем его в проекции на ось к O (вдоль стержня; поперечные силы отсутствуют):

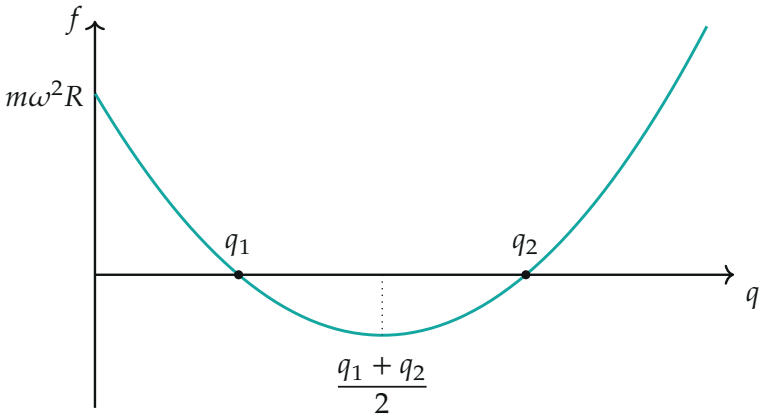
$$q\,\omega RB - \frac{kq^2}{4R^2} = m\omega^2 R. \qquad (1)$$

Применимость: бусинка относительно стержня неподвижна и $\omega = \text{const}$, поэтому ускорение лишь центростремительное.

2. Уравнение — квадратное по q. Соберём все члены в одну часть:

$$\frac{k}{4R^2}\,q^2 - \omega RB\,q + m\omega^2 R = 0. \qquad (2)$$

Величины ω, B, R, m, k одинаковы в обоих случаях, а равновесие есть при двух различных зарядах q_1 и q_2 — значит, они корни уравнения (2). Парабола $f(q)$ — левая часть (2) — пересекает ось q ровно в этих двух точках (рисунок).



Левая часть уравнения (2) как функция q: нули — q_1 и q_2; значение при $q = 0$ равно $m\omega^2 R$. Рисунок для $m = R = k = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 3$.

По теореме Виета для $aq^2 + bq + c = 0$ произведение корней равно c/a, а сумма — $-b/a$:

$$q_1 q_2 = \frac{m\omega^2 R \cdot 4R^2}{k} = \frac{4m\omega^2 R^3}{k}, \qquad q_1 + q_2 = \frac{\omega RB \cdot 4R^2}{k} = \frac{4\omega R^3 B}{k}. \qquad (3)$$

3. Угловая скорость. Из произведения корней в (3)

$$\omega^2 = \frac{kq_1 q_2}{4mR^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{kq_1 q_2}{4mR^3}}.$$

Второй способ, без Виета: разделим (1), записанное для q_1, на q_1, а для q_2 — на q_2, и вычтем одно из другого. Член ωRB уйдёт:

$$-\frac{k(q_1-q_2)}{4R^2}=m\omega^2R\Big(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\Big)=m\omega^2R\,\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}\quad\Longrightarrow\quad\omega^2=\frac{kq_1q_2}{4mR^3}.$$

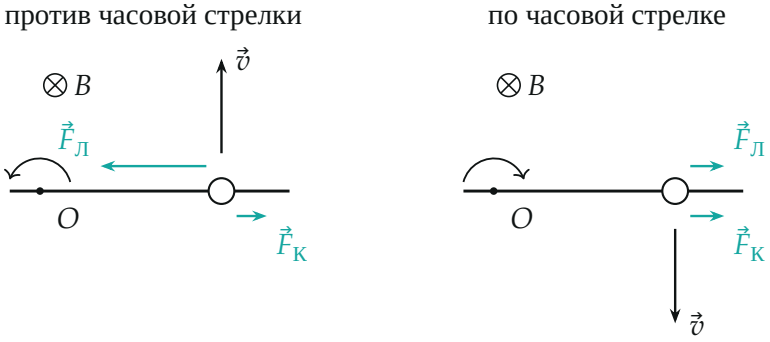
Результат тот же; на $q_2-q_1\neq 0$ сократить можно, потому что заряды разные.

Пункт 2.

4. Индукция поля. Теперь воспользуемся суммой корней в (3): $B=k(q_1+q_2)/(4R^3\omega)$. Подставим ω из шага 3:

$$B=\frac{k(q_1+q_2)}{4R^3}\sqrt{\frac{4mR^3}{kq_1q_2}}=(q_1+q_2)\sqrt{\frac{km}{4R^3q_1q_2}}=\sqrt{\frac{km\,(q_1+q_2)^2}{4R^3q_1q_2}}.$$

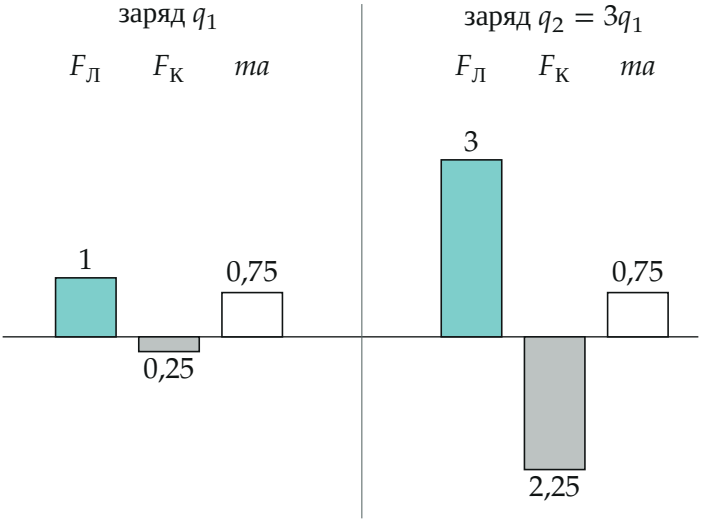
Обратите внимание: направление важно. Если бы стержень вращался в другую сторону (или поле было бы направлено на нас), сила Лоренца была бы направлена *от* оси, как и кулоновская: обе силы тянули бы бусинку наружу, и центростремительного ускорения не получилось бы (рисунок). Уравнение (1) записано именно для показанного направления.



Слева — вариант из условия: $F_Л$ к оси, равновесие возможно. Справа — вращение по часовой стрелке: обе силы направлены от оси, равновесия нет.

Проверка. Размерность: $kq_1q_2/(mR^3)$ — это (сила на расстоянии R) / (mR) = с^{-2}, значит, ω верна; $B=k(q_1+q_2)/(4R^3\omega)=E/v$ имеет

размерность индукции. Предел: пусть $q_1 = q_2 = q$ (корни слились, дискриминант $(\omega RB)^2 - \dfrac{k}{R^2} m\omega^2 R = 0$). Тогда по нашей формуле $B^2 = km/R^3$, а из дискриминанта $B^2 = km/R^3$ — то же. Численный пример: $m = R = k = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 3$ даёт $\omega^2 = \frac{3}{4}$, $B = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$. Силы на рисунке ниже: для q_1 сила Лоренца $q\omega RB = 1$ и кулоновская $\frac{1}{4}$, их разность $\frac{3}{4} = m\omega^2 R$; для q_2 — 3 и $\frac{9}{4}$, разность снова $\frac{3}{4}$. Обе бусинки получают одно и то же центростремительное ускорение, при разных зарядах — именно это и означает «два значения q».



Для $q_1 = 1$ и $q_2 = 3$ ($m = R = k = 1$): сила Лоренца минус кулоновская равна $m\omega^2 R = 0{,}75$ в обоих случаях.

Физический смысл: более заряженная бусинка сильнее чувствует магнитное поле, но и сильнее отталкивается от соседней; при подходящих ω и B оба эффекта дают одну и ту же разность.

Ответ. 1) $\omega = \sqrt{\dfrac{kq_1q_2}{4mR^3}}$; 2) $B = \sqrt{\dfrac{km\,(q_1+q_2)^2}{4R^3 q_1 q_2}}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.