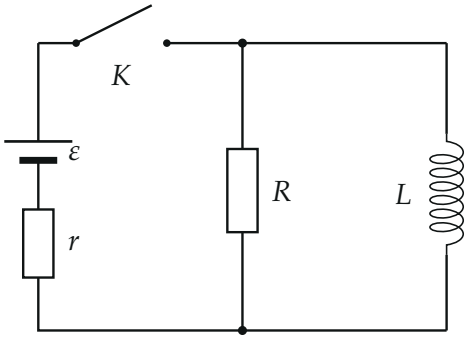
Цепь с катушкой: рост тока после замыкания

Задача 4. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 4] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме, причём $R = 4r$. Ключ K разомкнут, режим в цепи установился. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. К моменту размыкания скорость роста силы тока в катушке индуктивности уменьшается в 3 раза.

1. Найти скорость роста силы тока в катушке сразу после замыкания ключа.
2. Найти силу тока I_L через катушку непосредственно перед размыканием ключа.
3. Какое количество теплоты Q выделится в цепи после размыкания ключа?



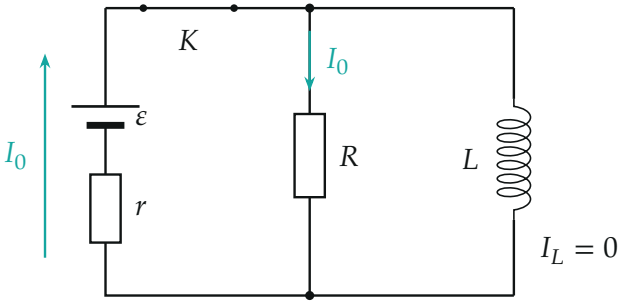
▲ **Решение. Что происходит.** Источник с внутренним сопротивлением r подключается ключом к параллельным резистору R и катушке L. Ток через катушку скачком измениться не может, поэтому сразу после замыкания он равен нулю, и весь ток источника идёт через R. Затем ток катушки растёт, а скорость его роста падает: напряжение на катушке $L\,I'_L$ равно напряжению на R, а оно уменьшается, потому что часть тока уходит в катушку. После размыкания источник отключён, и энергия катушки целиком выделяется на R. Класс задачи — цепь с катушкой: напряжение на катушке равно $L\,dI_L/dt$, дальше обычные правила Кирхгофа.

Обозначения. I_ε, I_R, I_L — токи через источник, резистор R и катушку; положительные направления — как на рисунках (вверх в левой ветви, вниз через R и L). $I'_L = dI_L/dt$, I'_{0L} — его значение сразу после замыкания, I_0 — ток источника в этот момент. Напряжения на R и на L равны, так как элементы включены параллельно.

Пункт 1.

1. Момент сразу после замыкания. Ток через катушку равен нулю: он не может измениться скачком, иначе ЭДС самоиндукции была бы бесконечной. Остаётся последовательная цепь из источника, r и R, поэтому

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{\varepsilon}{5r}.$$



Сразу после замыкания: ток источника I_0 идёт через R, ток катушки равен нулю.

2. Напряжение на катушке. Катушка и резистор подключены к одним и тем же узлам, поэтому напряжение на катушке $L\,I'_{0L}$ равно напряжению на резисторе I_0R. Отсюда

$$L\,I'_{0L} = I_0R, \qquad I'_{0L} = \frac{\varepsilon R}{L(R+r)} = \frac{4\varepsilon}{5L}.$$

Обратите внимание: сам ток в катушке в этот момент нулевой, а напряжение на ней — нет: $L\,I'_{0L} = \frac{4}{5}\varepsilon$.

Пункт 2.

3. Напряжение на катушке перед размыканием. Скорость роста тока в катушке к этому моменту уменьшилась в 3 раза, то есть $I'_L = \frac{1}{3}\,I'_{0L}$.

Так как напряжение на катушке равно $L\,I'_L$,

$$U = L\,I'_L = \frac{1}{3}\,L\,I'_{0L} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{15}.$$

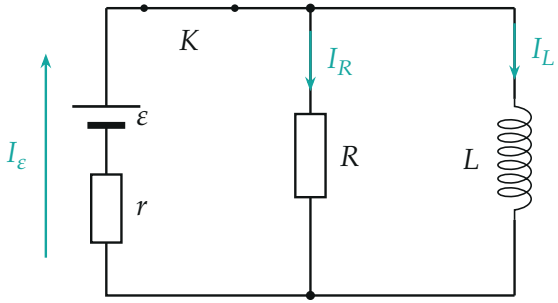
4. Токи. Запишем для этого момента закон Ома для резистора R, второе правило Кирхгофа для контура «источник — r — параллельный участок» и первое правило Кирхгофа для узла:

$$I_R = \frac{U}{R}, \qquad \varepsilon - I_\varepsilon r = U, \qquad I_\varepsilon = I_R + I_L.$$

Подставляем $U = \frac{4}{15}\varepsilon$ и $R = 4r$:

$$I_R = \frac{4\varepsilon/15}{4r} = \frac{\varepsilon}{15r}, \qquad I_\varepsilon = \frac{11\varepsilon/15}{r} = \frac{11\varepsilon}{15r},$$

$$I_L = I_\varepsilon - I_R = \frac{10\varepsilon}{15r} = \frac{2\varepsilon}{3r}.$$



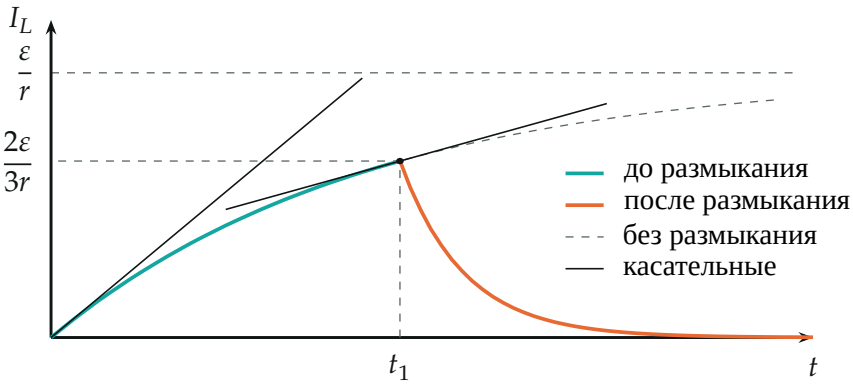
Перед размыканием: ток источника делится на ток резистора и ток катушки, $I_\varepsilon = I_R + I_L$.

Второй способ, через зависимость $I_L(t)$. Источник с резистором R по теореме об эквивалентном источнике заменяется источником $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon R}{R+r}$ с внутренним сопротивлением $r' = \dfrac{Rr}{R+r} = \dfrac{4r}{5}$, замкнутым на

катушку: $L\,I_L' + r' I_L = \varepsilon'$. Решение с $I_L(0) = 0$ — экспонента

$$I_L = \frac{\varepsilon'}{r'}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{\varepsilon}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \tau = \frac{L}{r'} = \frac{5L}{4r}.$$

Скорость роста $I_L' = \dfrac{\varepsilon}{r\tau}\,e^{-t/\tau}$ уменьшилась в 3 раза, то есть $e^{-t_1/\tau} = \dfrac{1}{3}$ (момент размыкания $t_1 = \tau \ln 3$). Тогда $I_L(t_1) = \dfrac{\varepsilon}{r}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\varepsilon}{3r}$ — тот же ответ.



Ток катушки (время в единицах τ). Касательные в начале и в момент t_1 показывают, что скорость роста уменьшилась в 3 раза; после размыкания ток убывает с постоянной $\tau' = L/R = \tau/5$.

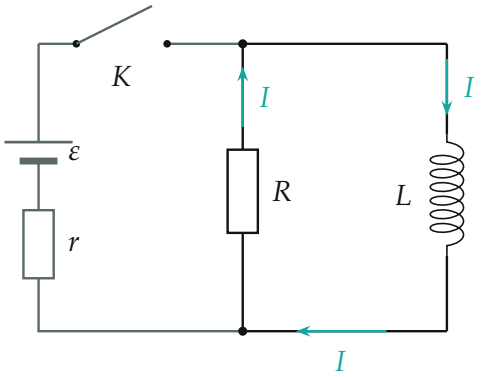
Пункт 3.

5. Что происходит после размыкания. Источник отключён, остаётся контур из катушки и резистора R. Ток катушки сразу после размыкания тот же, что перед ним, то есть $I_L = \dfrac{2\varepsilon}{3r}$ (скачком он не меняется), а затем убывает: катушка поддерживает ток за счёт запасённой энергии, а резистор её рассеивает.

6. Закон сохранения энергии для контура R — L. Вся энергия магнитного поля катушки переходит в тепло на R, потому что других потребителей и источников в контуре нет, а идеальная катушка тепла не

выделяет:

$$Q = \frac{1}{2} L I_L^2 = \frac{1}{2} L \cdot \frac{4\varepsilon^2}{9r^2} = \frac{2L\varepsilon^2}{9\,r^2}.$$



После размыкания: левая ветвь отключена (серая), ток I течёт по контуру R — L.

Второй способ, напрямую. После размыкания $L\,I' = -IR$, откуда $I = I_L e^{-Rt/L}$. Мощность на резисторе $P = I^2R$, и

$$Q = \int_0^\infty I_L^2 e^{-2Rt/L} R\,dt = I_L^2 R \cdot \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} L I_L^2.$$

Обратите внимание. В пункте 1 нужна скорость роста тока, а не сам ток: ток в этот момент нулевой. Теплота Q — только та, что выделяется после размыкания; тепло на R и r до размыкания в неё не входит.

Проверка. Размерность: ε/L — А/с, ε/r — А, $L\varepsilon^2/r^2$ — Дж. Предел $R \gg r$: катушка оказывается подключённой прямо к источнику, и формула пункта 1 даёт $I'_{0L} = \varepsilon/L$, как должно быть. Численно (метод Эйлера при $\varepsilon = r = L = 1$, $R = 4$): $I'_{0L} = 0{,}8000$, отношение скоростей 3 достигается при $t_1 = 1{,}3733$ ($= \tau \ln 3$ с $\tau = 1{,}25$), $I_L = 0{,}6667$ и $Q = 0{,}22222 = 2/9$. Смысл: тепла хватает ровно на энергию катушки.

Ответ. 1) $I'_{0L} = \dfrac{4\varepsilon}{5L}$; 2) $I_L = \dfrac{2\varepsilon}{3r}$; 3) $Q = \dfrac{2L\varepsilon^2}{9\,r^2}$.