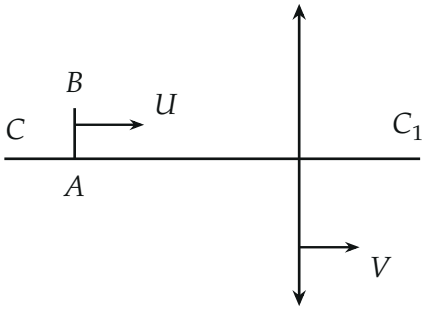
# Линза и стержень, движущиеся вдоль оси

**Задача 5.** [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 5] Линза с фокусным расстоянием $F = 24$ см движется со скоростью $V = 1$ мм/с (см. рис.). Стержень $AB$ длиной $h = 1$ см, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы $CC_1$, движется со скоростью $U = 5V/4$. Все движения поступательные вдоль главной оптической оси линзы. В некоторый момент стержень находится на расстоянии $d = 5F/4$ от линзы.

1. На каком расстоянии от линзы будет изображение стержня в этот момент?
2. Какой длины будет изображение стержня в этот момент?
3. С какой скоростью будет двигаться изображение точки $A$ стержня в этот момент?




▲ **Решение. Что происходит.** Стержень находится между фокусом и двойным фокусом ($F < d < 2F$), поэтому линза даёт его действительное перевёрнутое увеличенное изображение. Положение и размер находятся по формуле тонкой линзы и по увеличению. Скорость изображения ищем в системе отсчёта линзы: в ней линза неподвижна, формула линзы применима прямо, а её производная по времени даёт скорость изображения относительно линзы. Потом возвращаемся в неподвижную систему добавлением скорости линзы. Класс задачи — движущиеся линза и предмет, переход в систему отсчёта линзы.

**Обозначения.** Ось $x$ направлена вдоль главной оптической оси вправо, как $\vec{V}$ и $\vec{U}$ на рисунке. $d$ — расстояние от стержня до линзы, $f$ — от

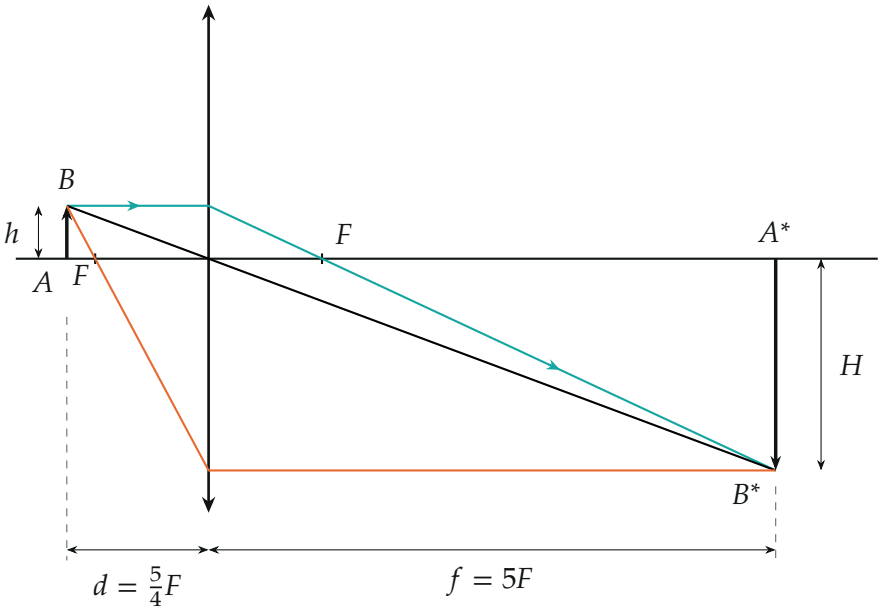
линзы до изображения, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение; $F = 24$ см$=$ 240 мм.

**Пункт 1.**

**1. Расстояние до изображения.** Запишем формулу тонкой линзы для действительного изображения, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, и выразим $f$:

$$f = \frac{dF}{d - F} = \frac{\frac{5}{4}F \cdot F}{\frac{5}{4}F - F} = 5F = 120 \text{ см}.$$

Так как $f > 0$, изображение действительное и находится по другую сторону от линзы, чем стержень.




*Три луча от точки B: параллельный оси (бирюзовый) идёт после линзы через правый фокус; идущий через левый фокус (оранжевый) выходит параллельно оси; луч через центр линзы (чёрный) не преломляется. Все три пересекаются в B*. Поперёк оси масштаб гораздо крупнее, чем вдоль.*

**Пункт 2.**

**2. Длина изображения.** Поперечное увеличение $\Gamma = \dfrac{f}{d} = \dfrac{5F}{5F/4} = 4$. Из подобия треугольников на рисунке луча через центр линзы $H/h = f/d$, поэтому

$$H = \Gamma h = 4h = 4 \text{ см}.$$

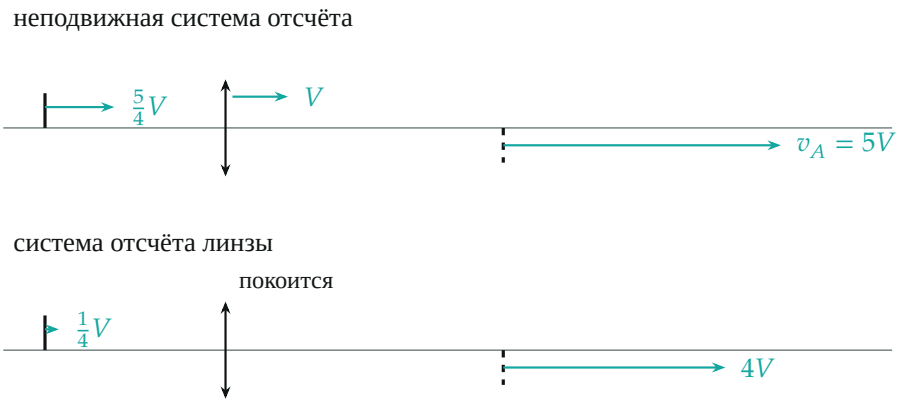
Изображение перевёрнуто: точка $A$ остаётся на оси, а точка $B^*$ лежит под осью.

**Пункт 3.**

**3. Система отсчёта линзы.** В неподвижной системе отсчёта двигаются и линза, и стержень, и расстояние $d$ меняется из-за обоих движений. Перейдём в систему, связанную с линзой: в ней линза неподвижна, а стержень движется со скоростью

$$U_{\text{отн}} = U - V = \frac{5}{4}V - V = \frac{1}{4}V$$

вправо, то есть к линзе. Значит, $d$ убывает: $d' = -\dfrac{V}{4}$.




*Скорости (длина стрелок пропорциональна скорости). В неподвижной системе: линза $V$, стержень $\frac{5}{4}V$, изображение точки $A$ — искомая $v_A$. В системе линзы: стержень $\frac{1}{4}V$, изображение $4V$.*

**4. Производная формулы линзы.** Продифференцируем $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} =$

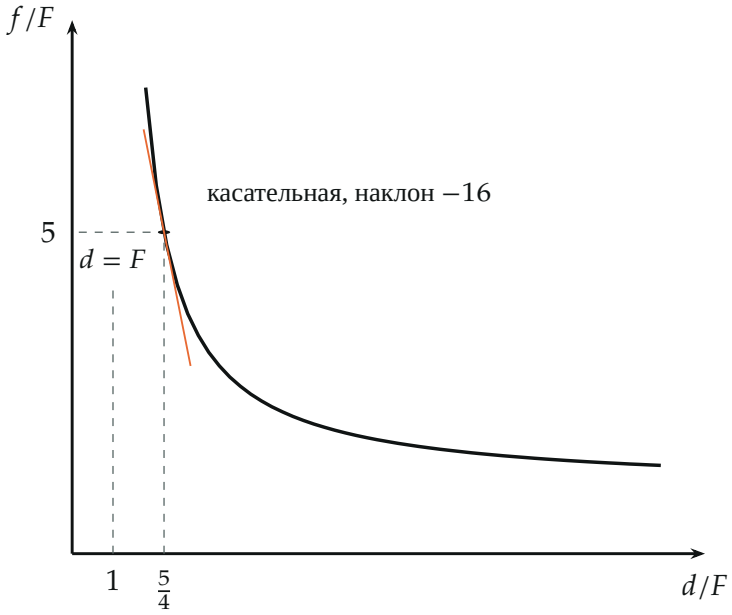
$\frac{1}{F}$ по времени, $F = \text{const}$ (производная сложной функции: $(1/d)' = -d'/d^2$):

$$-\frac{d'}{d^2} - \frac{f'}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = -\frac{f^2}{d^2}\, d' = -\Gamma^2 d'.$$

При $d' = -\dfrac{V}{4}$ и $\Gamma = 4$

$$f' = \Gamma^2 \cdot \frac{V}{4} = 16 \cdot \frac{V}{4} = 4V.$$

Знак «плюс»: расстояние $f$ растёт, изображение точки $A$ удаляется от линзы вправо со скоростью $4V$ относительно линзы.



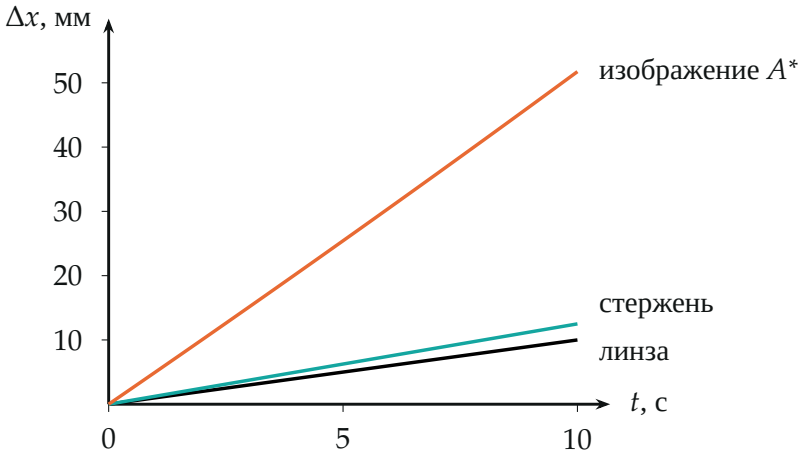

*Зависимость $f(d)$ в единицах $F$. В точке $d = \frac{5}{4}F$ касательная (прямая) имеет наклон $-\Gamma^2 = -16$: при сдвиге стержня к линзе на малое $\Delta d$ изображение уходит от линзы на $16\Delta d$.*

**5. Скорость в неподвижной системе.** Скорость изображения точки $A$ равна сумме скорости линзы и скорости изображения относительно

линзы (закон сложения скоростей):

$$v_A = V + f' = V + 4V = 5V = 5 \text{ мм/с}.$$

Вправо, в ту же сторону, что и линза.




*Смещения от момента в условии: линза ($V = 1$ мм/с), стержень ($1{,}25V$) и изображение точки $A$ (по формуле линзы). Наклон графика изображения в начале — 5 мм/с; небольшой изгиб связан с тем, что $f$ зависит от $d$ нелинейно.*

**Обратите внимание.** Множитель $\Gamma^2$, а не $\Gamma$: продольное увеличение квадратично, потому что $f$ зависит от $d$ как гипербола. И нельзя забывать о скорости самой линзы: $4V$ — скорость изображения относительно линзы, а не в неподвижной системе.

**Проверка.** Размерность: $f$ и $H$ — длины, $v_A$ — скорость. Предел: если $U = V$ (стержень неподвижен относительно линзы), то $d' = 0, f' = 0$, и изображение движется вместе с линзой со скоростью $V$; общая формула $v_A = V + \Gamma^2(U - V)$ даёт именно это. Численно: за 1 с $d = 299{,}75$ мм, $f = \dfrac{240 \cdot 299{,}75}{59{,}75} \approx 1204{,}0$ мм; изображение сместилось относительно линзы на 4,0 мм, линза сместилась на 1 мм, итого $\approx 5{,}0$ мм. Смысл: изображение движется впятеро быстрее линзы, потому что стержень при $\Gamma = 4$ «подталкивает» его с продольным увеличением 16.

**Ответ.** 1) $f = 5F = 120$ см; 2) $H = 4h = 4$ см; 3) $v_A = 5V = 5$ мм/с.