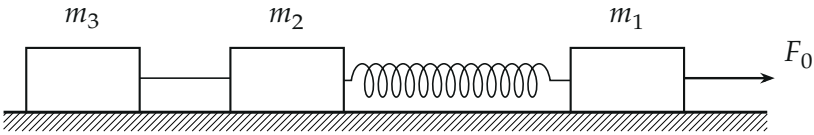
Бруски, нить и массивная пружина

Задача 1. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 5–6, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся три бруска, соединённые лёгкой нитью и пружиной жёсткостью $k = 22$ Н/м (см. рис.). Масса пружины $m = 0{,}2$ кг и равномерно распределена вдоль оси ненапряжённой пружины. Массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$. Под действием горизонтальной силы $F_0 = 2{,}1$ Н, приложенной к бруску m_1, система движется по столу. При этом длина пружины увеличивается на 30% по сравнению с длиной ненапряжённой пружины.

1. Найти ускорение системы.
2. Найти силу T натяжения нити.
3. Найти длину L_0 ненапряжённой пружины.



▲ **Решение. Что происходит.** Единственная горизонтальная внешняя сила — F_0 на бруске m_1; стол гладкий. Всё остальное тянется за m_1: сначала пружина, потом брусок m_2, нить и брусок m_3. Нить и пружина передают силы по цепочке, поэтому сила в цепочке *убывает* от F_0 к последнему бруску. Пружина, в отличие от нити, имеет массу, и это главное в задаче: сила в разных её сечениях разная, и она растягивается неравномерно. Ключевой закон — второй закон Ньютона, применённый к разным частям системы: ко всей системе (ускорение), к бруску m_3, к части цепочки (силы на концах пружины). Удлинение пружины находим суммированием по её малым участкам.

Обозначения. Ось x — по направлению силы F_0. Все части системы движутся с одним ускорением a (нить нерастяжима, а удлинение пружины с течением времени не меняется — по условию её длина задана). T — сила натяжения нити; F_2 — сила, с которой пружина действует на брусок m_2 (и, по третьему закону Ньютона, брусок m_2 на пружину); F_1

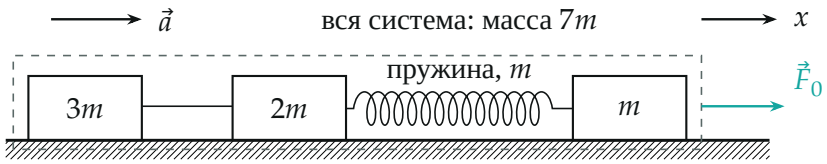
— сила, с которой брусок m_1 действует на пружину (и пружина на него). Вертикальные силы ($m\vec{g}$ и $\vec{N}$) уравновешены и в уравнениях движения вдоль x не участвуют.

Пункт 1.

1. Ускорение системы. Возьмём в качестве тела всю систему: три бруска, нить и пружина. Тогда силы взаимодействия между частями — внутренние, и во втором законе Ньютона для системы остаётся только внешняя горизонтальная сила F_0. Масса системы вместе с пружиной равна $m + 2m + 3m + m = 7m$ (масса пружины тоже m), и

$$7m\,a = F_0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{F_0}{7m} = \frac{2{,}1}{7 \cdot 0{,}2} = 1{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Нить лёгкая, её масса не входит; масса пружины входит обязательно.



Вся система как одно тело: внешняя сила только $\vec{F}_0$; масса $7m$.

Пункт 2.

2. Сила натяжения нити. Рассмотрим брусок m_3: по горизонтали на него действует только нить. Второй закон Ньютона в проекции на x:

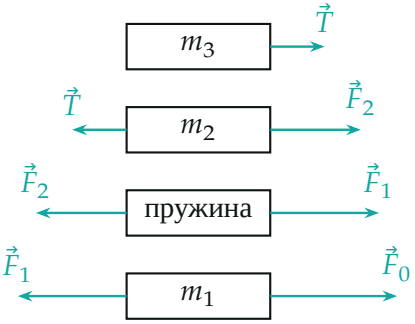
$$T = m_3 a = 3m\,a = \frac{3}{7}F_0 = 0{,}9 \text{ Н}.$$

Нить лёгкая и нерастяжимая, поэтому сила натяжения одинакова на обоих концах: нить действует на m_2 тоже с силой T, но влево.

Пункт 3.

3. Силы на концах пружины. Для бруска m_2 и бруска m_3 вместе (нить внутренняя): единственная внешняя сила — F_2 от пружины, поэтому $F_2 = (m_2 + m_3)a = 5m\,a = \frac{5}{7}F_0 = 1{,}5$ Н. Для бруска m_1 вдоль x: $F_0 - F_1 = m\,a$ (пружина тянет его назад с силой F_1), откуда $F_1 = F_0 - m\,a = \frac{6}{7}F_0 = 1{,}8$ Н. Проверка по самой пружине: на неё

действуют F_1 вправо и F_2 влево, и $F_1 - F_2 = 0{,}3$ Н должно равняться её массе, умноженной на ускорение: $m\,a = 0{,}2 \cdot 1{,}5 = 0{,}3$ Н — верно.



Силы на бруски, нить и пружину (длины стрелок пропорциональны модулям: $T = 0{,}9$, $F_2 = 1{,}5$, $F_1 = 1{,}8$, $F_0 = 2{,}1$ Н). Все части движутся с одним ускорением a.

4. Сила в произвольном сечении пружины. Масса пружины распределена равномерно по её *ненапряжённой* длине L_0. Выделим левую часть пружины от левого конца до сечения, отстоящего на x_0 от этого конца в ненапряжённом состоянии (то есть длиной x_0 в недеформированном виде). Её масса $m\,x_0/L_0$. На эту часть действуют F_2 влево и сила $F(x_0)$ от остальной пружины вправо. Второй закон Ньютона:

$$F(x_0) - F_2 = \frac{m\,x_0}{L_0}\,a \quad \Longrightarrow \quad F(x_0) = F_2 + \frac{m\,a}{L_0}\,x_0.$$

Сила растёт по линейному закону от F_2 (в левом конце) до $F_2 + ma = F_1$ (в правом) — график на рисунке.

5. Удлинение пружины. Разобьём пружину на малые участки длиной dx_0 (в ненапряжённом виде). Жёсткость участка обратно пропорциональна его длине: целая пружина жёсткостью k — это цепочка последовательных пружинок, поэтому участок длиной dx_0 имеет жёсткость kL_0/dx_0. Растягивает его сила $F(x_0)$, значит, его удлинение

$$d\xi = \frac{F(x_0)\,dx_0}{k\,L_0}.$$

Просуммируем удлинения всех участков от левого конца до правого (x_0 от 0 до L_0):

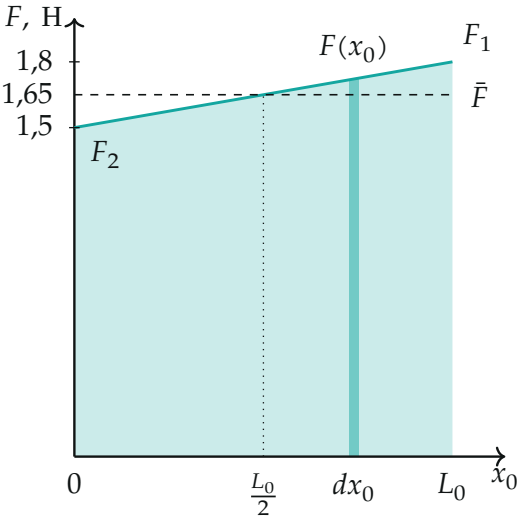
$$\Delta L = \frac{1}{kL_0}\int_0^{L_0} F(x_0)\,dx_0 = \frac{1}{k}\cdot\frac{\text{площадь под графиком}}{L_0} = \frac{\bar F}{k},$$

где $\bar F$ — средняя по длине сила. Для линейной функции среднее равно полусумме значений на концах (площадь трапеции делим на её основание; то же самое — значение в середине, $F(L_0/2)$):

$$\bar F = \frac{F_1+F_2}{2} = \frac{\frac{6}{7}F_0+\frac{5}{7}F_0}{2} = \frac{11}{14}F_0.$$

Отсюда

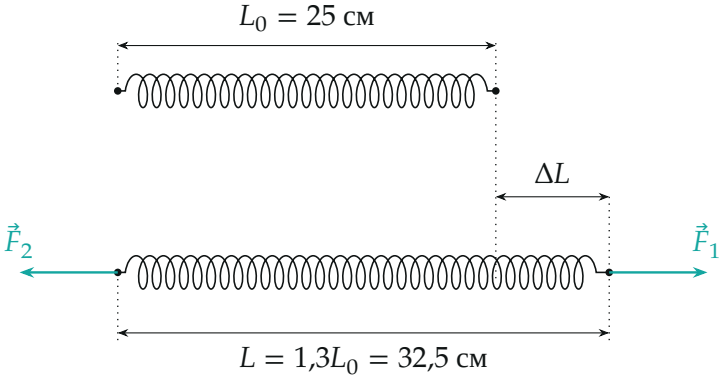
$$\Delta L = \frac{11}{14}\frac{F_0}{k} = \frac{11}{14}\cdot\frac{2{,}1}{22} = 0{,}075\text{ м} = 7{,}5\text{ см}.$$



Сила в пружине как функция x_0. Площадь трапеции, делённая на L_0, равна средней силе $\bar F = \frac{1}{2}(F_1+F_2)$. Тонкая полоска — вклад участка dx_0 в удлинение: $d\xi = F\,dx_0/(kL_0)$.

6. Длина ненапряжённой пружины. По условию длина пружины увеличилась на 30% по сравнению с ненапряжённой, то есть $\Delta L = 0{,}3\,L_0$ (рисунок):

$$L_0 = \frac{\Delta L}{0{,}3} = \frac{11}{14}\,\frac{F_0}{0{,}3\,k} = \frac{0{,}075}{0{,}3}\ \text{м} = 0{,}25\ \text{м} = 25\ \text{см}.$$



Пружина без нагрузки и в движении: $L_0 = 25$ см, $L = 32{,}5$ см, $\Delta L = 7{,}5$ см.

Обратите внимание: ускорение нельзя искать как $F_0/6m$, забыв про массу пружины: она равна m и входит в массу системы. И нельзя считать силу в пружине одинаковой: из-за массы она меняется от F_2 до F_1, и удлинение определяет её *среднее* значение, а не F_1 или F_2 по отдельности.

Проверка. Размерность: F_0/k — метры. Сила в пружине между F_2 и F_1, значит, ΔL должно лежать между $F_2/k = 6{,}8$ см и $F_1/k = 8{,}2$ см: 7,5 см — в середине этого отрезка, как и должно быть. Второй способ: сила в середине пружины $F(L_0/2) = F_2 + \frac{1}{2}ma = 1{,}65$ Н, $\Delta L = 1{,}65/22 = 0{,}075$ м — то же. Предел: при малой массе пружины ($F_1 \to F_2$) удлинение стремится к F_2/k, как у невесомой.

Физический смысл: массивная пружина натянута сильнее у переднего конца, и растяжение задаёт полусумма сил на концах.

Ответ. 1) $a = \dfrac{F_0}{7m} = 1{,}5$ м/с^2; 2) $T = \dfrac{3}{7}F_0 = 0{,}9$ Н; 3) $L_0 = 25$ см.