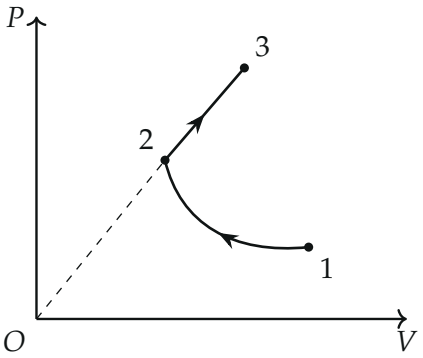
Гелий: сжатие, расширение $p \propto V$ и равенство работ

Задача 2. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 5–6, задача 2] Газообразный гелий сжимается в процессе 1–2 с постоянной молярной теплоёмкостью $C = 0{,}5R$. Затем газ расширяется в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). В процессе 2–3 к газу подводят количество теплоты Q. Работа внешних сил над газом при сжатии и работа газа при расширении равны.

1. Найти работу A внешних сил над газом при сжатии.
2. Какое количество теплоты Q_{12} (с учётом знака) получил газ в процессе 1–2?

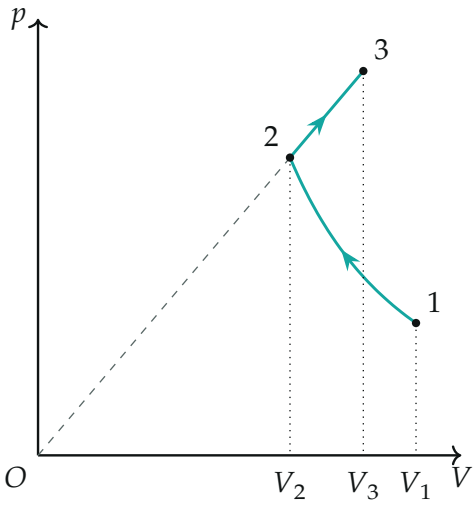


▲ **Решение.** **Что происходит.** Гелий — одноатомный идеальный газ: $pV = \nu RT$, $U = \frac{3}{2}\nu RT$. На участке 1–2 газ сжимают, причём теплоёмкость постоянна, поэтому теплота и изменение температуры связаны формулой $Q = \nu C\,\Delta T$. На участке 2–3 давление пропорционально объёму ($p = \alpha V$), газ расширяется и нагревается. Обе части задачи — первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$, записанное для каждого участка. Чтобы не плодить букв, выразим все величины через A — работу внешних сил при сжатии, она же работа газа при расширении.

Обозначения. $A > 0$ — работа внешних сил над газом на участке 1–2, значит, работа *газа* на нём равна $-A$; работа газа на участке 2–3 равна

$+A$ (по условию). Q — теплота, полученная на участке 2–3. T_1, T_2, T_3 — температуры в состояниях.

Качественная картина. На участке 1–2 газ сжимается — работа газа отрицательна, но теплоёмкость $C = 0{,}5R$ положительна; как меняется температура и в какую сторону течёт теплота, выясним в пункте 2. Далее по прямой через начало координат он расширяется и греется ещё сильнее: $pV = \alpha V^2$ растёт. Рисунок построен для $T_2 = 1{,}5\,T_1$, ответы не зависят от этого числа.



Процессы 1–2 (сжатие, $C = 0{,}5R$) и 2–3 (прямая $p \propto V$, расширение). Пунктир — прямая через начало координат.

Пункт 1.

1. Работа газа на участке 2–3. Под прямой $p = \alpha V$ лежит трапеция; её площадь — это вычитание двух треугольников с вершиной в O: $\frac{1}{2}p_3V_3 - \frac{1}{2}p_2V_2$. Значит, работа газа

$$A_{23} = \frac{1}{2}\,(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{1}{2}\,\nu R\,(T_3 - T_2),$$

потому что $pV = \nu RT$. По условию $A_{23} = A$, откуда $\nu R\,(T_3 - T_2) = 2A$. Формула верна только для $p \propto V$.

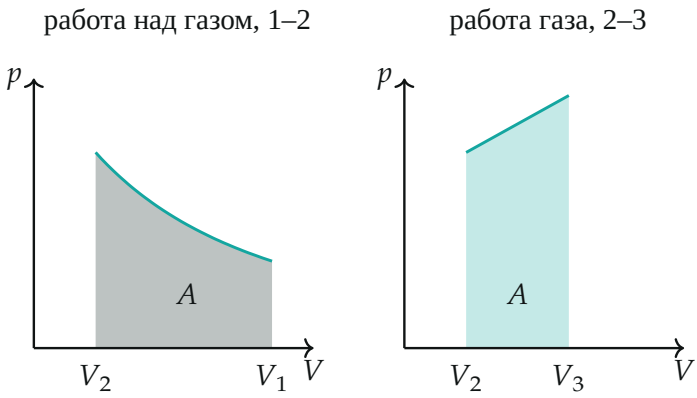
2. Теплота на участке 2–3. Первый закон термодинамики для газа между состояниями 2 и 3: $Q = \Delta U_{23} + A_{23}$. Внутренняя энергия гелия $\frac{3}{2}\nu RT$, поэтому

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R\,(T_3 - T_2) = 3A, \qquad Q = 3A + A = 4A.$$

3. Работа внешних сил. Из последнего равенства

$$A = \frac{Q}{4}.$$

Из подведённой теплоты Q три четверти ($3A$) идут на нагрев газа и одна четверть (A) — на работу расширения.



Равенство работ: серым — работа внешних сил на участке 1–2 (площадь под кривой), бирюзовым — работа газа на участке 2–3 (площадь под прямой). Масштаб в панелях одинаков; площади равны.

Пункт 2.

4. Что известно про участок 1–2. Работа *газа* здесь отрицательна и равна $-A$ (газ сжимают). Теплоёмкость задана, поэтому теплоту выразим двумя способами. Первый — по определению молярной теплоёмкости:

$$Q_{12} = \nu C\,(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\nu R\,(T_2 - T_1).$$

Второй — по первому закону термодинамики:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{\text{газа}} = \frac{3}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) - A.$$

5. Изменение температуры. Приравняем выражения для Q_{12} — неизвестным осталась только разность температур:

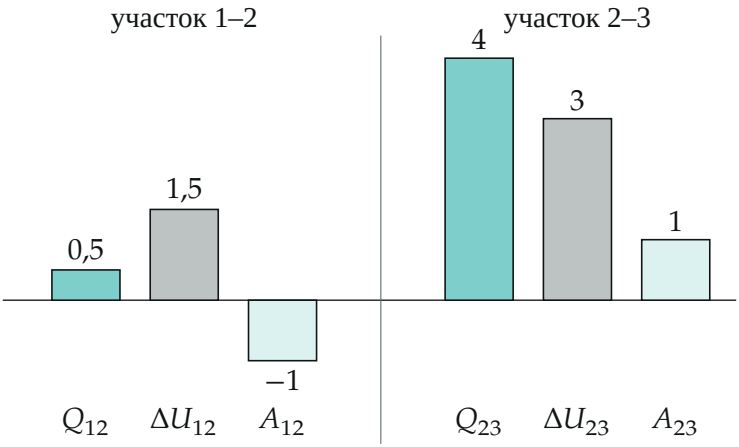
$$\frac{1}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) - A \quad \Longrightarrow \quad \nu R\,(T_2 - T_1) = A.$$

Значит, $T_2 > T_1$: при сжатии газ нагрелся (внутренняя энергия выросла на $\frac{3}{2}A$), как и ожидалось.

6. Теплота на участке 1–2. Подставим в определение:

$$Q_{12} = \frac{1}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{A}{2} = \frac{Q}{8}.$$

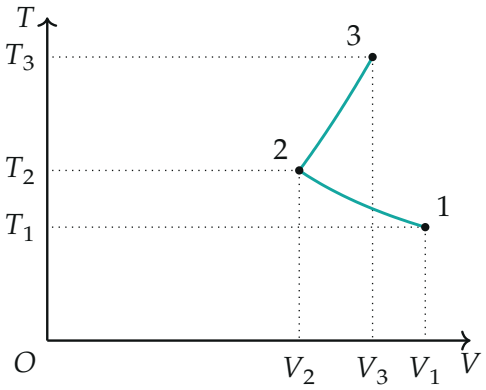
Знак «плюс»: газ в действительности *получает* теплоту, хотя его сжимают. Внешние силы совершили работу A, внутренняя энергия выросла на $\frac{3}{2}A$, и недостающая половина $\frac{1}{2}A$ пришла теплотой (столбики на рисунке: $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$, здесь $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1$).



Энергетический баланс участков в единицах A: справа $4 = 3 + 1$, слева $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + (-1)$ (работа газа отрицательна — столбик вниз).

Обратите внимание: A в условии — работа *внешних* сил при сжатии, работа газа на этом участке равна $-A$. Знак легко потерять: если подставить $+A$, получится $Q_{12} = -\frac{1}{2}A$ — знак ответа поменяется.

Проверка. Размерность: A и Q_{12} — в джоулях. Второй способ для Q_{12} — по политропе. Для процесса с теплоёмкостью $C = 0{,}5R$ показатель в уравнении $pV^n = \text{const}$ равен $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V} = \dfrac{\frac{1}{2}R - \frac{5}{2}R}{\frac{1}{2}R - \frac{3}{2}R} = 2$, то есть $pV^2 = \text{const}$. Работа газа по такой политропе $A_{\text{газа}} = \dfrac{\nu R\,(T_1 - T_2)}{n - 1} = -\nu R\,(T_2 - T_1)$, а из условия она равна $-A$ — то есть снова $\nu R\,(T_2 - T_1) = A$, как в шаге 5, и $Q_{12} = \frac{1}{2}A$. Численный пример на рисунке ($\nu R T_1 = 1$, $V_1 = 1$, $T_2 = 1{,}5$, $T_3 = 2{,}5$): $A_{23} = \frac{1}{2}(2{,}5 - 1{,}5) = 0{,}5$ и работа сжатия $\int_{V_2}^{V_1} V^{-2}dV = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ — равны, $Q = 4 \cdot 0{,}5 = 2$, $Q_{12} = 0{,}25 = Q/8$. Температура вдоль всего процесса растёт: $T \propto 1/V$ на участке 1–2 и $T \propto V^2$ на участке 2–3 (рисунок).



Температура на участках 1–2 ($T \propto 1/V$) и 2–3 ($T \propto V^2$): $T_1 = 1 < T_2 = 1{,}5 < T_3 = 2{,}5$.

Физический смысл: газ получает теплоту на обоих участках, хотя на первом его сжимают; $Q_{12} : Q = 1 : 8$.

Ответ. 1) $A = \dfrac{Q}{4}$; 2) $Q_{12} = \dfrac{Q}{8} > 0$ (газ получает теплоту).