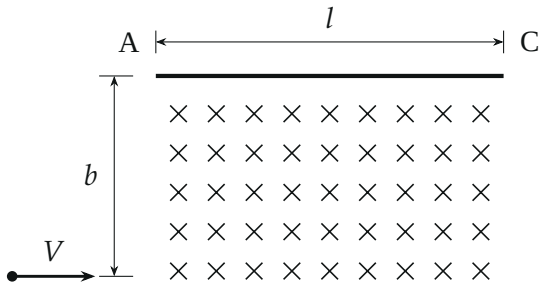
Заряженный шарик в поле и у стены

Задача 3. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 5–6, задача 3] В область однородного магнитного поля с индукцией $B = 1$ Тл и шириной $l = 30\sqrt{3}$ см влетает со скоростью $V = 1$ мм/с положительно заряженный шарик очень малого радиуса с отношением заряда к массе $\gamma = q/m = 10^{-2}$ Кл/кг (см. рис.). Направление скорости перпендикулярно направлению магнитного поля и левой границе поля. На расстоянии $b = 15$ см от места, где шарик влетает в область магнитного поля, параллельно его начальной скорости и вектору индукции, располагается непроводящая стена AC.

1. Найдите радиус кривизны траектории шарика в поле.
2. Найдите угол между стеной и вектором скорости шарика непосредственно перед первым ударом.
3. Найдите время движения шарика в поле.

Удары шарика о стену считать абсолютно упругими. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь. Принять $\pi = 3{,}14$.

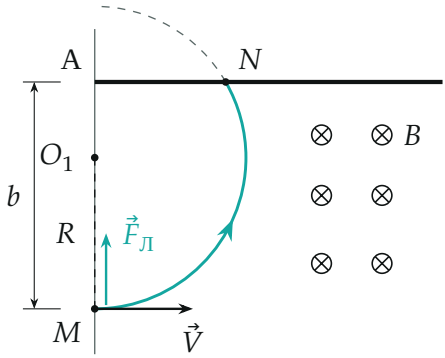


▲ **Решение. Что происходит.** Сила Лоренца перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому модуль скорости постоянен, а ускорение — только нормальное: шарик движется по окружности. Эту окружность можно описать заранее: она лежит в плоскости, перпендикулярной полю, а её центр лежит на левой границе (скорость при входе перпендикулярна границе). Расстояние от центра до стены окажется меньше радиуса, значит, шарик долетит до стены. Удар упругий и гладкий:

составляющая скорости, перпендикулярная стене, меняет знак, составляющая вдоль стены сохраняется, модуль скорости не меняется. Поэтому после удара шарик снова движется по окружности того же радиуса, но с новым центром. Время движения — это полный угол поворота скорости, делённый на угловую скорость обращения.

Обозначения. M — точка входа; ось x — вдоль стены вправо, y — вверх, начало в M. Поле направлено от нас (крестики на рисунке). $\omega_c = qB/m = \gamma B$ — угловая скорость обращения; $T = 2\pi/(\gamma B)$ — период. Силы тяжести нет, других сил, кроме силы Лоренца, нет.

Направление силы. Положительный заряд, скорость вправо, поле от нас: $\vec{F}_Л = q\,\vec{V}\times\vec{B}$ направлена вверх — к стене. Значит, центр окружности O_1 лежит на левой границе на расстоянии R выше M (сила Лоренца направлена к центру).



Окружность с центром O_1 на левой границе поля; стена на высоте b над M. Крестики — поле $\vec{B}$, направленное от нас.

Пункт 1.

1. Радиус окружности. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление к центру окружности. Единственная сила — сила Лоренца, поэтому

$$\frac{mV^2}{R} = qVB \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{mV}{qB} = \frac{V}{\gamma B} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}\cdot 1}\ \text{м} = 0{,}1\ \text{м} = 10\ \text{см}.$$

Постоянство $|V|$ здесь обязательно: у силы Лоренца нет касательной составляющей, работа равна нулю. Расстояние от центра окружности до

стены $b - R = 5$ см меньше $R = 10$ см, поэтому окружность пересекает стену, и шарик ударится о неё.

Пункт 2.

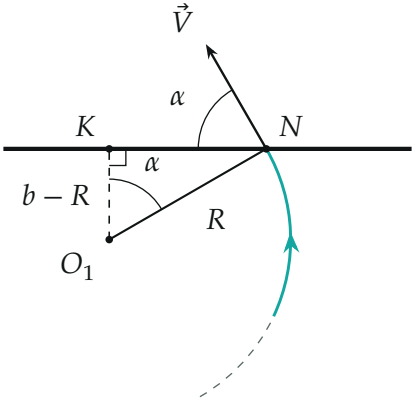
2. Угол перед первым ударом. Пусть первая точка пересечения окружности со стеной — N, а K — основание перпендикуляра из центра O_1 на стену. В прямоугольном треугольнике O_1KN гипотенуза $O_1N = R$, катет $O_1K = b - R$:

$$\cos \angle KO_1N = \frac{b-R}{R} = \frac{15-10}{10} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \angle KO_1N = 60^\circ.$$

Скорость в точке N перпендикулярна радиусу O_1N, а стена перпендикулярна O_1K. Поэтому угол между скоростью и стеной равен углу между радиусом и перпендикуляром к стене — то есть

$$\alpha = \angle KO_1N = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Второй способ — в координатах. Окружность: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$; при $y = b$ получаем $x_N = \sqrt{R^2 - (b-R)^2} = 5\sqrt{3}$ см. Скорость направлена по касательной: единичный вектор $\left(-\frac{y_N - R}{R}, \frac{x_N}{R}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; его угол с осью x имеет косинус $\frac{1}{2}$, то есть 60°. Результаты совпали.



Геометрия первого удара: $\cos\alpha = (b-R)/R$, $\alpha = 60^\circ$; *угол между скоро-*

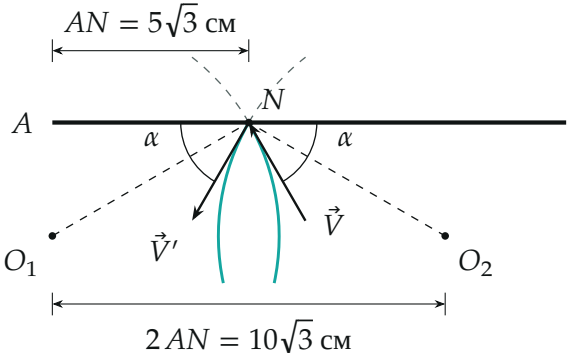
стью и стеной равен углу при центре.

Пункт 3.

3. Что происходит при ударе. Удар упругий и гладкий: составляющая скорости, перпендикулярная стене (вертикальная), меняет знак, горизонтальная сохраняется. Скорость до удара $V(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, после удара $V(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$: угол со стеной тот же, 60° (рисунок). Сила Лоренца по-прежнему поворачивает скорость против часовой стрелки, поэтому новый центр O_2 лежит слева от новой скорости на расстоянии R, то есть

$$\vec{O}_2 = \vec{N} + R\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big) \quad \Longrightarrow \quad O_2 = (10\sqrt{3},\ 10)\ \text{см}.$$

Центр сместился вдоль линии $y = R$ вправо на $10\sqrt{3} = 2\,AN$ см (где $AN = x_N = 5\sqrt{3}$ см). Это повторяется при каждом ударе: центры идут шагом $10\sqrt{3}$ см: $O_k = ((k-1)\cdot 10\sqrt{3},\ 10)$ см.



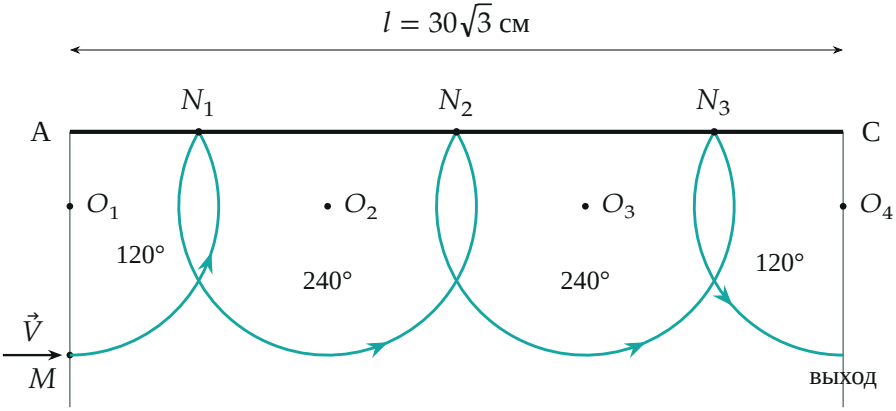
Упругий удар: угол со стеной сохраняется, центр окружности сдвигается на $2\,AN = 10\sqrt{3}$ см. Серым пунктиром показано, как пошла бы траектория, если бы стены не было.

4. Сколько дуг и каких. Найдём угол, который проходит шарик по каждой окружности (отсчёт — от центра окружности, против часовой стрелки).

- Окружность 1: от нижней точки (M, угол -90°) до N (угол 30°): 120°.

- Окружности 2 и 3: от точки удара (угол 150°) через нижнюю точку до следующего удара (угол $30° + 360°$): 240° каждая. Точки ударов N_1, N_2, N_3 — при $x = 5\sqrt{3}$, $15\sqrt{3}$, $25\sqrt{3}$ см (шаг $10\sqrt{3}$ см).
- Центр O_4 следующей окружности имеет $x = 3 \cdot 10\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ см $= l$ — он лежит ровно на правой границе поля. Шарик от точки удара N_3 (угол 150°) идёт к нижней точке окружности 4 (угол 270°): это 120°. В нижней точке он оказывается на границе, и скорость в ней горизонтальна — перпендикулярна границе: шарик выходит из поля. Следующий удар ($x = 35\sqrt{3}$ см) уже за границей, не состоится.

Раньше шарик из поля не выходит: окружность 3 доходит до $x = 20\sqrt{3} + 10 \approx 44{,}6$ см $< l$, а окружность 2 не заходит левее $10\sqrt{3} - 10 \approx 7{,}3$ см > 0.



Вся траектория по расчёту. Дуги: 120°, 240°, 240°, 120°*; шарик выходит в нижней точке окружности 4 на правой границе.*

5. Время. Сумма углов $120° + 240° + 240° + 120° = 720° = 2 \cdot 360°$ — ровно два полных оборота (дуги 1 и 2 вместе дают 360°, дуги 3 и 4 — тоже). За один оборот проходит время $T = \dfrac{2\pi}{\gamma B}$, поэтому

$$t = 2T = \frac{4\pi}{\gamma B} = \frac{4 \cdot 3{,}14}{10^{-2} \cdot 1} = 1256 \text{ с}.$$

Второй способ: скорость по модулю постоянна, путь равен двум длинам окружности, $t = \dfrac{2 \cdot 2\pi R}{V} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{10^{-3}} = 1256$ с.

Обратите внимание: после удара шарик не остаётся на прежней окружности — центр смещается на $2AN$, и траектория получается цепочкой дуг.

Проверка. Размерность: Тл $=$ кг/(Кл $\cdot$ с), поэтому γB измеряется в с$^{-1}$, $R = V/(\gamma B)$ — в метрах, t — в секундах. Численное моделирование движения (шаг 10^{-3} с, отражение на стене): первый удар при $x = 8{,}66$ см $= 5\sqrt{3}$ см под углом 60,0° к стене, всего три удара, выход на $x = l$ в нижней точке в момент $t = 1256{,}65$ с (при точном π; при $\pi = 3{,}14$ — 1256 с). Предел: при $b \geq 2R$ шарик до стены не дошёл бы.

Физический смысл: траектория — «гирлянда» одинаковых дуг с центрами, смещающимися на $2AN$; ширина поля подобрана так, что выход приходится на нижнюю точку.

Ответ. 1) $R = 10$ см; 2) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; 3) $t = \dfrac{4\pi}{\gamma B} \approx 1256$ с.