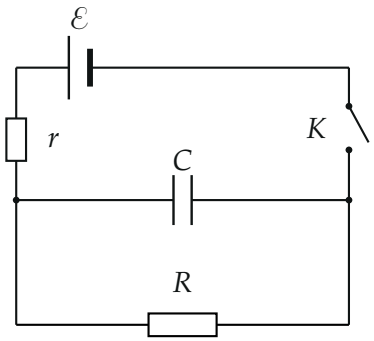
RC-цепь после замыкания ключа

Задача 4. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 5–6, задача 4] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме. Ключ K разомкнут, режим в цепи установился. Затем ключ замыкают. В некоторый момент M ток через резистор R оказался в 2 раза меньше максимального тока через него.

1. Найти максимальный ток I_m через R после замыкания ключа.
2. Найти напряжение U_C на конденсаторе в момент M.
3. Найти мощность P, развиваемую источником в момент M.

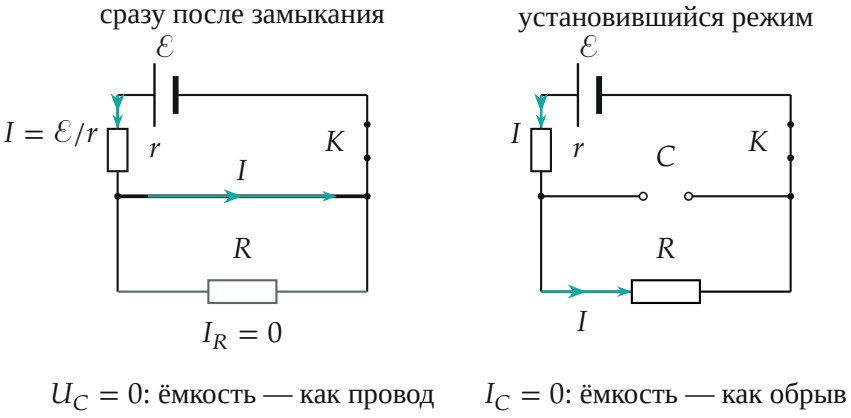


▲ **Решение. Что происходит.** Конденсатор включён параллельно резистору R, поэтому в любой момент напряжение на нём равно напряжению на R: $U_C = I_R R$, где I_R — ток через R. До замыкания ключа цепь разорвана, конденсатор разряжен ($U_C = 0$). После замыкания он заряжается через резистор r, U_C растёт от нуля до предельного значения, и вместе с ним, по закону Ома для R, растёт ток I_R. Значит, ток через R растёт от нуля к максимуму, который достигается в самом конце, когда конденсатор зарядился и ток через него прекратился. Класс задачи: цепь с конденсатором — сначала мгновенные значения (ёмкость как провод, потом как обрыв), затем закон Ома для полной цепи в произвольный момент.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника (на рисунке — $\mathcal{E}$), I — ток через источник и резистор r, I_R — ток через R, I_C — ток через конденсатор,

U_C — напряжение на конденсаторе. Направления токов — от «плюса» источника (длинная пластина) по цепи.

Качественная картина. В первый момент после замыкания конденсатор не заряжен: $U_C = 0$ и он как провод, так что R закорочен, а весь ток источника $\mathcal{E}/r$ идёт в конденсатор. Затем конденсатор заряжается, I_C падает, а $I_R = U_C/R$ растёт. Когда зарядка закончилась, $I_C = 0$, конденсатор как разрыв, и ток источника целиком идёт через r и R (рисунок).



$U_C = 0$: ёмкость — как провод $I_C = 0$: ёмкость — как обрыв

Два крайних состояния. Слева: $U_C = 0$ — участок с конденсатором работает как провод, ток через R равен нулю. Справа: конденсатор заряжен, $I_C = 0$ — ветвь с ним оборвана, ток идёт через r и R.

Пункт 1.

1. Максимальный ток через R. Ток через R определяется напряжением на R: $I_R = U_C/R$. Конденсатор заряжается, U_C только растёт, поэтому и I_R только растёт. Максимум — в установившемся режиме, когда ток через конденсатор прекратился. Тогда по закону Ома для полной цепи с последовательно соединёнными r и R:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Обратите внимание: в первый момент максимален ток *источника* ($\mathcal{E}/r$), но не ток через R: разряженный конденсатор закорачивает R (ток через

него равен нулю). Не путайте: $\mathcal{E}/(r+R)$ — не начальное, а *конечное* значение тока через R.

Пункт 2.

2. Напряжение на конденсаторе в момент M. В момент M ток через R равен $\frac{1}{2}I_m$. Конденсатор и R соединены параллельно, значит, напряжение на конденсаторе равно напряжению на R:

$$U_C = I_R R = \frac{1}{2} I_m R = \frac{\mathcal{E}R}{2(r+R)}.$$

Это ровно половина предельного напряжения $\mathcal{E}R/(r+R)$, на которое зарядится конденсатор.

Пункт 3.

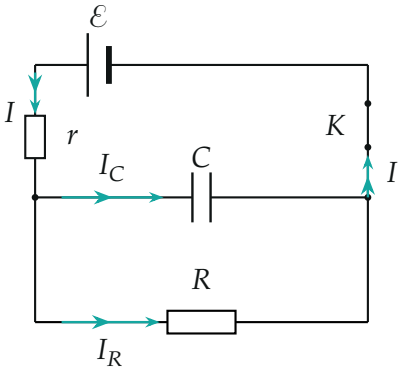
3. Ток источника в момент M. Запишем закон Ома для замкнутого контура «источник — r — конденсатор» (напряжение на параллельном участке — U_C): $\mathcal{E} = Ir + U_C$. Отсюда

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r}\Big(1 - \frac{R}{2(r+R)}\Big) = \frac{\mathcal{E}\,(2r+R)}{2r\,(r+R)}.$$

Применимость: закон Ома для участка с r верен в любой момент, пока ток течёт через r; он не требует, чтобы конденсатор был заряжен.

4. Мощность источника. Источник идеален, его мощность — ЭДС, умноженная на ток через источник:

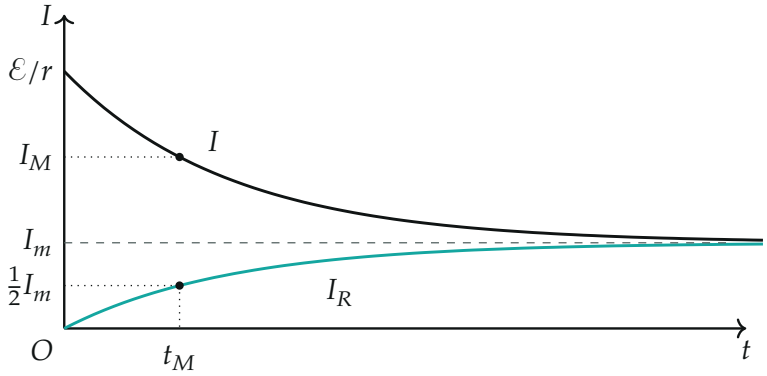
$$P = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2(2r+R)}{2r\,(r+R)}.$$



Момент M: $I_R = \frac{1}{2}I_m$, $U_C = I_R R$, $I = I_R + I_C$, $\mathcal{E} = Ir + U_C$. Токи — бирюзовые стрелки; U_C равно напряжению на R.

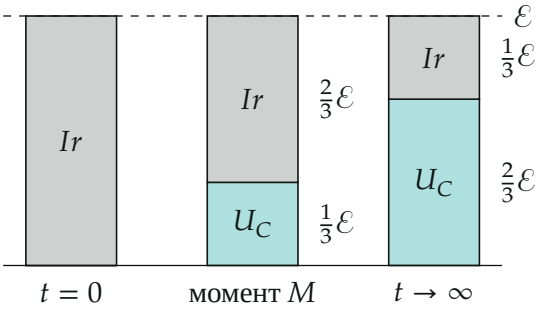
Проверка. Размерность: I_m — А; U_C — В; P — Вт. Второй способ: баланс мощностей в момент M. Мощность источника должна равняться сумме тепловых мощностей $I^2r + I_R^2R$ и мощности зарядки конденсатора $U_C I_C$, где $I_C = I - I_R$. Для $r = 1$, $R = 2$, $\mathcal{E} = 1$ (условные единицы): $I_m = \frac{1}{3}$, $I_R = \frac{1}{6}$, $U_C = \frac{1}{3}$, $I = \frac{2}{3}$, $I_C = \frac{1}{2}$; $P = \frac{2}{3}$, а сумма $\frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ — совпало.

Вспомогательно: как меняются токи со временем. Для произвольного момента $\mathcal{E} = Ir + U_C$ и $I = U_C/R + C\,dU_C/dt$; отсюда $\dfrac{CrR}{r+R}\dfrac{dU_C}{dt} = U_\infty - U_C$ с $U_\infty = \dfrac{\mathcal{E}R}{r+R}$, то есть $U_C = U_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ при $\tau = \dfrac{CrR}{r+R}$. Момент M — это $U_C = U_\infty/2$, то есть $t_M = \tau \ln 2$ (рисунок для $r = 1$, $R = 2$, $\mathcal{E} = 1$).



Токи после замыкания ($r = 1$, $R = 2$, $\mathcal{E} = 1$ в условных единицах): ток через R растёт от нуля до I_m, ток источника падает от $\mathcal{E}/r$ до I_m. В момент $t_M = \tau \ln 2$ ток через R равен $\frac{1}{2}I_m$.

Куда делась ЭДС: на рисунке видно, как она делится между r и конденсатором. Сначала всё падает на r ($Ir = \mathcal{E}$); к моменту M на конденсатор приходится треть ЭДС, а в конце — две трети ($U_\infty = \frac{2}{3}\mathcal{E}$ при $R = 2r$).



Разделение ЭДС между r и конденсатором: $\mathcal{E} = Ir + U_C$ в три момента ($R = 2r$).

Физический смысл: пока конденсатор заряжается, часть тока уходит на зарядку и ток через R мал; чем больше заряд, тем больше напряжение на нём и на R, а ток через r падает.

Ответ. 1) $I_m = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}$; 2) $U_C = \dfrac{\mathcal{E}R}{2(r+R)}$; 3) $P = \dfrac{\mathcal{E}^2(2r+R)}{2r(r+R)}$.