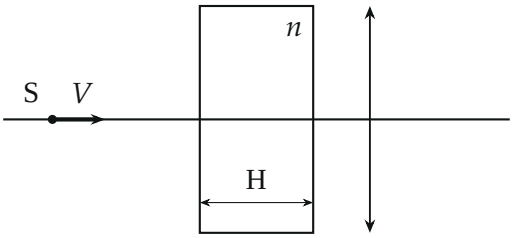
Жук (комар) и линза со стеклянной пластиной

Задача 5. [Физтех 2017/18, 11 класс, варианты 5–6, задача 5] Жук S ползёт со скоростью $V = 1$ см/с вдоль главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см (см. рис.). Между жуком и линзой перпендикулярно главной оптической оси расположена стеклянная пластина толщиной $H = 5$ см с показателем преломления $n = 5/3$. В некоторый момент жук находится на расстоянии $d = 14$ см от линзы.

1. На каком расстоянии от линзы находилось бы изображение жука при отсутствии пластины?
2. На каком расстоянии от линзы находится изображение жука при наличии пластины?
3. С какой скоростью движется изображение жука при наличии пластины?



▲ **Решение. Что происходит.** Свет от жука идёт к линзе через плоскопараллельную пластину. Пластина не меняет направление лучей (вышедший луч параллелен вошедшему), но сдвигает его вбок. Для лучей, близких к оси, это выглядит так, будто жук находится не там, где он есть, а чуть *ближе* к линзе — на расстоянии $d_2 = d - \Delta$, где Δ — постоянный для данной пластины сдвиг. Дальше всё стандартно: формула тонкой линзы для кажущегося источника, а скорость изображения — производная формулы линзы по времени. Лучи считаем близкими к оси (малые углы): только тогда формула линзы и формула сдвига справедливы.

Обозначения. d — расстояние от жука до линзы, d_2 — расстояние от линзы до кажущегося положения жука S_1 при наличии пластины, f_1 и f_2

— расстояния от линзы до изображений без пластины и с ней, Δ — сдвиг, создаваемый пластиной. Все расстояния — вдоль оси, в сантиметрах.

Пункт 1.

1. Без пластины. Запишем формулу тонкой линзы для действительного предмета на расстоянии d и изображения на расстоянии f_1 по другую сторону линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F} \quad\Longrightarrow\quad f_1=\frac{dF}{d-F}=\frac{14\cdot 10}{14-10}=35\text{ см}.$$

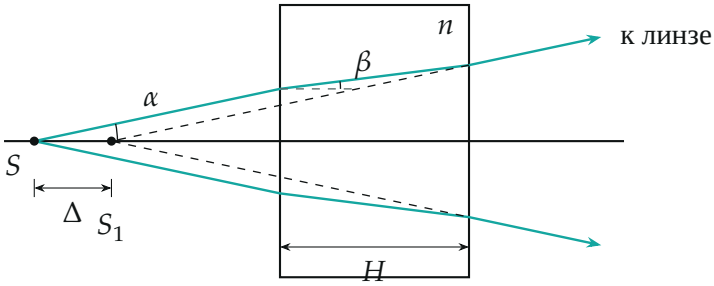
Так как $d>F$, изображение действительное, оно лежит за линзой.

Пункт 2.

2. Сдвиг, который создаёт пластина. Возьмём луч из жука под малым углом α к оси. На первой грани он преломляется: $\sin\alpha = n\sin\beta$, а при малых углах $\alpha = n\beta$. На второй грани луч возвращается к прежнему углу α (грани параллельны), то есть выходит параллельно входящему. Продолжив вышедший луч назад до оси, мы получим кажущееся положение жука S_1 (рисунок). Внутри пластины луч прошёл по вертикали $H\tan\beta$, без неё — $H\tan\alpha$; поэтому продолжение вышедшего луча пересекает ось ближе к линзе на

$$\Delta = H\Big(1-\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\Big)\approx H\Big(1-\frac{\beta}{\alpha}\Big)=H\Big(1-\frac{1}{n}\Big)=\frac{n-1}{n}H=\frac{2/3}{5/3}\cdot 5=2\text{ см}.$$

Второй способ: плоскопараллельная пластина толщиной H для близких к оси лучей работает как воздушный слой толщиной $H/n=3$ см, то есть «укорачивает» путь на $H-H/n=2$ см. Результат тот же; Δ не зависит от того, на каком расстоянии от пластины находится жук.

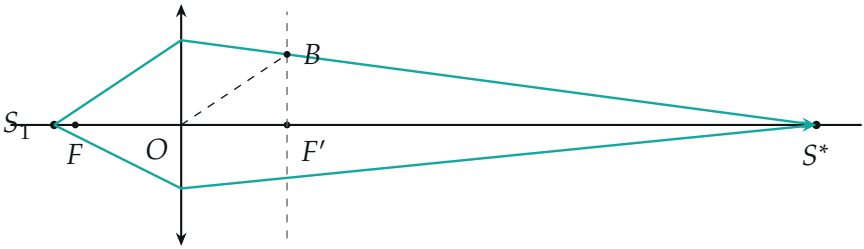


Ход двух лучей через пластину ($\alpha = 12°$, лучи построены по закону Снеллиуса). Продолжения вышедших лучей (пунктир) пересекаются в точке S_1 на расстоянии $\Delta \approx 2$ см от жука S.

3. Изображение при наличии пластины. Для линзы жук находится в точке S_1 на расстоянии $d_2 = d - \Delta = 14 - 2 = 12$ см. Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} \quad \Longrightarrow \quad f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = \frac{12 \cdot 10}{12 - 10} = 60 \text{ см}.$$

Изображение — в точке S^* за линзой на расстоянии 60 см (рисунок).



Построение для кажущегося источника S_1 ($d_2 = 12$ см, $F = 10$ см): лучи сходятся в точке S^* на расстоянии $f_2 = 60$ см. Пунктир — вспомогательный луч через центр линзы, параллельный верхнему лучу; он пересекает фокальную плоскость в точке B, через неё идёт преломлённый верхний луч.

Пункт 3.

4. Скорость кажущегося жука. Пластина неподвижна, жук ползёт со скоростью V вдоль оси. Сдвиг Δ постоянен, поэтому $d_2 = d - \Delta$ меняется с той же скоростью V: $\dfrac{d(d_2)}{dt} = -V$ (расстояние до линзы уменьшается, жук приближается к ней).

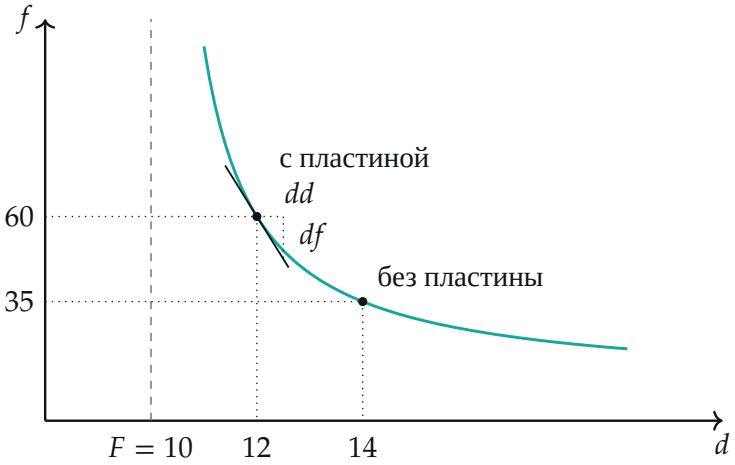
5. Скорость изображения. Возьмём производную формулы линзы $\dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{F}$ по времени (правая часть постоянна):

$$-\frac{1}{d_2^2}\frac{d(d_2)}{dt} - \frac{1}{f_2^2}\frac{df_2}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{df_2}{dt} = -\frac{f_2^2}{d_2^2}\frac{d(d_2)}{dt} = \Gamma^2 V,$$

где $\Gamma = f_2/d_2 = 60/12 = 5$ — поперечное увеличение. Положительный знак значит, что изображение удаляется от линзы. Скорость

$$u = \Gamma^2 V = 5^2 \cdot 1 \text{ см/с} = 25 \text{ см/с}.$$

Второй способ — производная явной формулы $f = \dfrac{d_2 F}{d_2 - F}$: $\dfrac{df}{dd_2} = -\dfrac{F^2}{(d_2 - F)^2} = -\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 = -25$, умножаем на $\dfrac{d(d_2)}{dt} = -V$ и получаем те же 25 см/с.

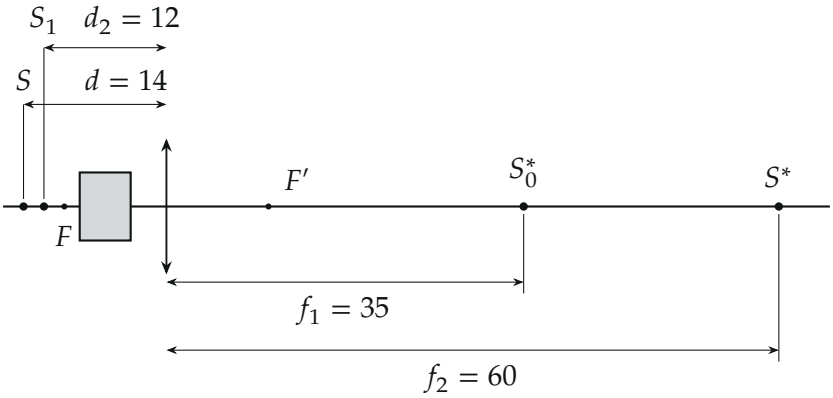


Зависимость $f(d)$ из формулы линзы (расстояния в см). Пластина переводит жука из точки $d = 14$ ($f = 35$) в точку $d_2 = 12$ ($f = 60$); касательная в этой точке имеет наклон -25: $df = -25\,dd$.

Обратите внимание: скорость изображения — не ΓV, а $\Gamma^2 V$ (продольное увеличение — квадрат поперечного), а Γ надо брать для кажущегося источника d_2, а не для d. Если бы пластины не было, $\Gamma = f_1/d = 2{,}5$ и скорость была бы 6,25 см/с — в четыре раза меньше.

Проверка. Размерность: f и d — в сантиметрах, u — в см/с. Предел: при $n \to 1$ (пластина не отличается от воздуха) $\Delta \to 0$ и $f_2 \to f_1$; при $n \to \infty$ $\Delta \to H = 5$ см: слой толщиной H как будто выпадает из пути света. Точный расчёт хода лучей по закону Снеллиуса при $\alpha = 12°$ даёт

сдвиг 2,04 см — в пределах малых углов 2 см; смещение жука на 0,01 см к линзе перемещает изображение с 60 примерно на 60,25 см, то есть на ≈ 25 см на каждый сантиметр пути жука.



Положения вдоль оси (расстояния в см; серый прямоугольник — пластина): жук S, кажущееся положение S_1, изображения S_0^* (без пластины) и S^* (с пластиной).

Физический смысл: пластина «приближает» жука к линзе, а вблизи фокуса изображение быстро уходит вдаль — поэтому оно оказывается далеко (60 см вместо 35 см) и бежит очень быстро.

Ответ. 1) $f_1 = 35$ см; 2) $f_2 = 60$ см; 3) $u = \Gamma^2 V = 25$ см/с (изображение удаляется от линзы).