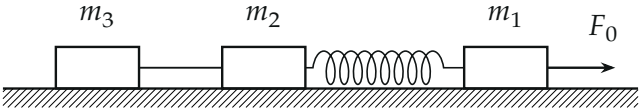
Три бруска с пружиной: растяжение на 25–35%

Задача 1. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся три бруска, соединённые лёгкой нитью и пружиной жёсткостью $k = 12$ Н/м (см. рис.). Масса пружины $m = 0{,}2$ кг и равномерно распределена вдоль оси ненапряжённой пружины. Массы брусков $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 4m$. Под действием горизонтальной силы $F_0 = 0{,}84$ Н, приложенной к бруску m_1, система движется по столу. При этом длина пружины увеличивается на 35% по сравнению с длиной ненапряжённой пружины.



1. Найдите ускорение системы.
2. Найдите силу T натяжения нити.
3. Найдите длину L_0 ненатянутой пружины.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на связанные тела: нить нерастяжима, пружина растянута постоянно, поэтому все тела и все точки пружины движутся с одним ускорением a. Берём систему целиком (внутренние силы нити и пружины в уравнение не входят) — получаем a; затем разрезаем систему в нужном месте и находим силу в разрезе. Особенность — пружина с массой: сила в ней меняется от сечения к сечению, и растяжение равно сумме удлинений всех её кусочков.

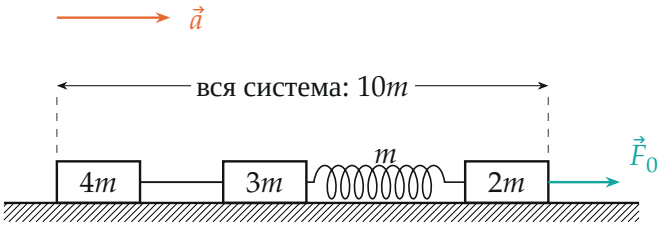
Обозначения. Ось x — вдоль стола по направлению силы $\vec{F}_0$. a — ускорение системы, T — натяжение нити, F_2 и F_1 — силы пружины на бруски m_2 и m_1 (по третьему закону Ньютона — они же силы, растягивающие пружину за концы). L_0 — длина ненапряжённой пружины, ΔL — её растяжение. Полная масса системы $2m + 3m + 4m + m = 10m$.

Пункт 1.

1. Система целиком. Запишем второй закон Ньютона для всей системы (бруски, нить и пружина) в проекции на ось x. Ось вдоль стола

выбрана потому, что на систему вдоль неё действует одна внешняя сила: стол гладкий, а сила тяжести и реакция стола вертикальны и друг друга уравновешивают. Нить и пружина — внутренние части системы, их силы взаимно уничтожаются (по третьему закону Ньютона):

$$10m\,a = F_0, \qquad a = \frac{F_0}{10m} = \frac{0{,}84}{10 \cdot 0{,}2} = 0{,}42 \text{ м/с}^2.$$



Система целиком: массы брусков $4m$, $3m$, $2m$ и пружины m дают $10m$; внешняя горизонтальная сила одна — $\vec{F}_0$.

Пункт 2.

2. Брусок m_3. Выберем для разрезания нить: слева от неё остаётся один брусок $m_3 = 4m$. Горизонтально на него действует только натяжение нити $\vec{T}$, направленное к бруску m_2, то есть вдоль оси x. Второй закон Ньютона для бруска m_3 в проекции на ось x:

$$T = 4m\,a = 4m \cdot \frac{F_0}{10m} = \frac{2}{5}F_0 = 0{,}4 \cdot 0{,}84 \text{ Н} \approx 0{,}34 \text{ Н}.$$

Знак «плюс»: нить тянет брусок вперёд.

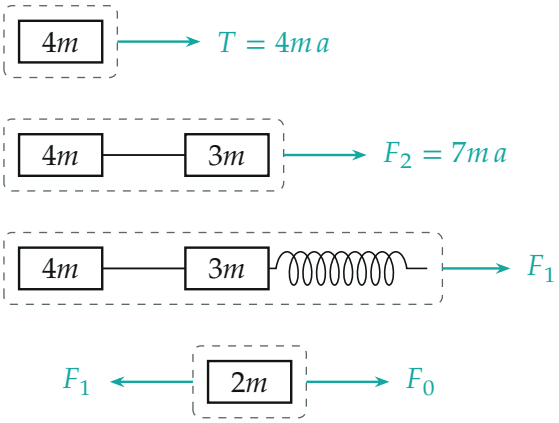
Пункт 3.

3. Силы на концах пружины. Тот же приём: разрезаем систему там, где нужна сила. Слева от пружины лежат m_3, нить и m_2 (масса $7m$), они разгоняются силой F_2 со стороны левого конца пружины. Если включить в «левую часть» и пружину, то слева от бруска m_1 останутся тела

общей массой $8m$, а ускоряет их сила F_1 со стороны бруска m_1:

$$F_2 = (3m + 4m)\,a = 7m\,a = \frac{7}{10}F_0,$$
$$F_1 = (3m + 4m + m)\,a = 8m\,a = \frac{8}{10}F_0.$$

Проверка по третьему закону: на брусок m_1 действуют вперёд F_0, назад F_1, и $2m\,a = F_0 - F_1 = \frac{2}{10}F_0$ — верно.

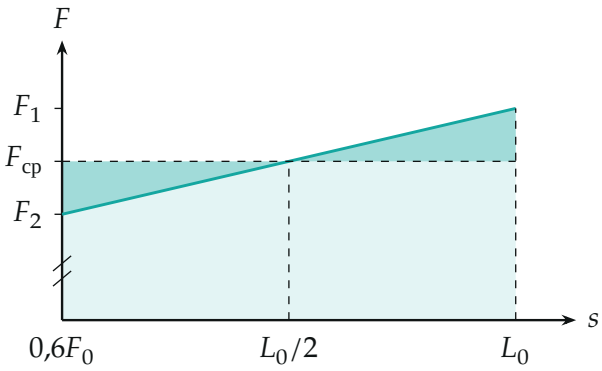


Четыре «разреза»: пунктиром обведено тело, для которого пишем второй закон Ньютона; бирюзовые стрелки — силы со стороны отброшенной части (все вдоль оси x).

4. Сила в пружине с массой. Пружина лёгкой не является: её кусочки сами разгоняются, поэтому сила упругости вдоль неё не постоянна. Введём координату s вдоль ненапряжённой пружины от её левого конца ($0 \le s \le L_0$); масса распределена равномерно, поэтому левее сечения s лежит кусок массой $m\,s/L_0$. Для всего, что левее этого сечения (брусок m_3, нить, брусок m_2 и этот кусок), второй закон Ньютона в проекции на ось x даёт натяжение $F(s)$ в сечении:

$$F(s) = \Big(7m + m\,\frac{s}{L_0}\Big)a = F_2 + (F_1 - F_2)\,\frac{s}{L_0}.$$

Натяжение линейно растёт от F_2 на левом конце до F_1 на правом: каждый следующий кусочек разгоняет всё больше массы.



Сила в сечении пружины $F(s)$ растёт линейно (ось F оборвана: отсчёт от $0{,}6F_0$). Тёмные треугольники равны, поэтому площадь трапеции равна площади прямоугольника высотой $F_{ср} = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$.

5. Растяжение пружины. Разобьём пружину на малые кусочки длиной ds (в ненапряжённом состоянии). Кусочек — тоже пружина, а жёсткость части пружины обратно пропорциональна её длине: $k\,L_0/ds$. Кусочек растягивается силой $F(s)$ (её значением в сечении — масса самого кусочка мала), поэтому его удлинение

$$d(\Delta L) = \frac{F(s)\,ds}{k\,L_0}.$$

Полное растяжение — сумма удлинений всех кусочков от $s = 0$ до $s = L_0$:

$$\Delta L = \frac{1}{kL_0}\int_0^{L_0} F(s)\,ds = \frac{1}{k}\cdot\frac{F_1 + F_2}{2},$$

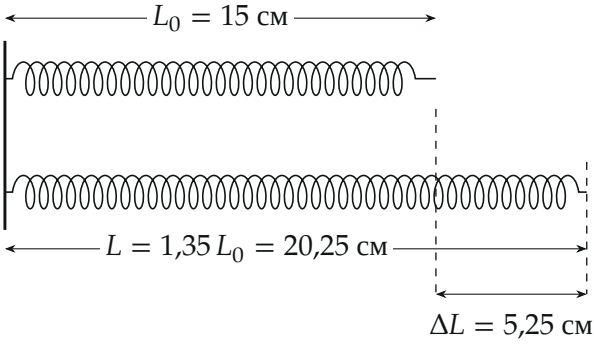
потому что интеграл — площадь трапеции под графиком $F(s)$, равная L_0, умноженной на среднюю силу. Подставим:

$$\Delta L = \frac{1}{k}\cdot\frac{\frac{8}{10}F_0 + \frac{7}{10}F_0}{2} = \frac{3}{4}\frac{F_0}{k} = \frac{3}{4}\cdot\frac{0{,}84}{12}\ \text{м} = 5{,}25\ \text{см}.$$

Обратите внимание: растяжение определяется средней силой $\frac{1}{2}(F_1+F_2)$, равной натяжению в середине пружины. Брать F_1/k или F_2/k нельзя: у пружины с массой силы на концах разные, и ни одна из них не даёт растяжения.

6. Длина ненапряжённой пружины. По условию длина пружины увеличилась на 35%: $\Delta L = 0{,}35\,L_0$. Отсюда

$$L_0 = \frac{\Delta L}{0{,}35} = \frac{3}{4}\,\frac{F_0}{k\cdot 0{,}35} = \frac{5{,}25\text{ см}}{0{,}35} = 15\text{ см}.$$



Пружина без нагрузки и при разгоне (масштаб соблюдён). Растяжение $\Delta L = 0{,}35\,L_0$.

Проверка. Размерность: $F_0/(k\alpha)$ — ньютон на (ньютон на метр), то есть метр. Предел: у невесомой пружины $F_1 = F_2$, и формула среднего даёт привычное $\Delta L = F/k$. Второй способ для ΔL: заменим интеграл суммой — разобьём пружину на n равных кусочков, у i-го натяжение в середине $(7 + \frac{i-1/2}{n})\,m\,a$, а жёсткость kn; сумма равна $\frac{7{,}5\,m\,a}{k} = \frac{3F_0}{4k}$ при любом n — тот же результат, который проверен и численно. Смысл: разгон «утяжеляет» пружину, как сила тяжести вдоль неё, и растяжение определяется силой посередине.

Ответ. 1) $a = \dfrac{F_0}{10m} = 0{,}42$ м/с^2;

2) $T = \dfrac{2}{5}F_0 \approx 0{,}34$ Н;

3) $L_0 = \dfrac{3F_0}{4k\cdot 0{,}35} = 15$ см.