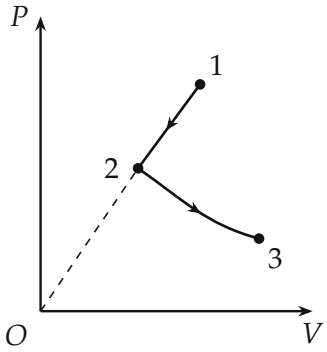
Гелий: теплота и работа при сжатии и расширении

Задача 2. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 2] Газообразный гелий сжимается в процессе 1-2, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Затем газ расширяется в процессе 2-3 с постоянной молярной теплоёмкостью $C = R$. При сжатии внешние силы совершают над газом работу A ($A > 0$). Работа внешних сил над газом при сжатии и работа газа при расширении равны.



1. Какое количество Q_{12} теплоты (с учётом знака) получил газ в процессе 1-2?
2. Какое количество Q_{23} теплоты (с учётом знака) получил газ в процессе 2-3?

▲ **Решение. Что происходит.** Гелий — одноатомный идеальный газ, его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT$. Задача на первое начало термодинамики для двух процессов между состояниями, о которых известна только работа: $Q = \Delta U + A_г$, где $A_г$ — работа самого газа. В процессе 1-2 давление прямо пропорционально объёму, $P = \alpha V$: по площади под графиком работа связывается с изменением температуры, и ΔU выражается через A. В процессе 2-3 теплоёмкость постоянна, $Q = \nu C\Delta T$, а работа известна из условия, отсюда уравнение для $\nu R\Delta T$.

Качественная картина. В процессе 1-2 температура $T = PV/\nu R = \alpha V^2/\nu R$ пропорциональна V^2: при сжатии газ остывает, внутренняя

энергия убывает, а внешние силы ещё и вкладывают работу A. Всё это должно уйти из газа теплотой, поэтому $Q_{12} < 0$ заметно больше A.

Обозначения. ν — число молей; $A_\text{г}$ — работа газа с учётом знака: по условию в процессе 1-2 она равна $-A$ (газ сжимают), в процессе 2-3 равна $+A$. ΔT — изменение температуры в процессе, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T$; Q — теплота, полученная газом.

Пункт 1.

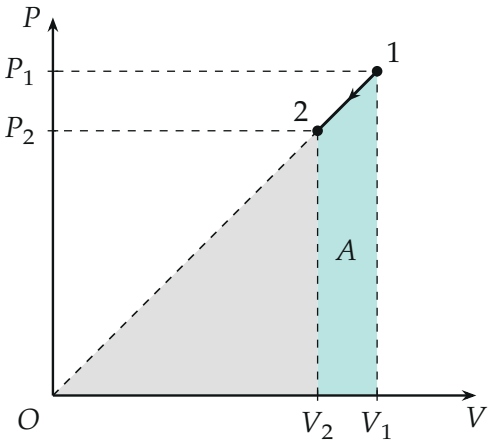
1. Работа газа в процессе 1-2. Работа газа численно равна площади под графиком $P(V)$, а при сжатии знак у неё отрицательный. Прямая 1-2 лежит на луче из начала координат, поэтому площадь под ней можно считать двумя способами. Первый — как трапецию, второй — как разность двух прямоугольных треугольников с вершиной в O: $\frac{1}{2}P_1V_1$ и $\frac{1}{2}P_2V_2$ (рисунок ниже). Оба дают одно и то же:

$$A_\text{г}^{(12)} = -\frac{P_1+P_2}{2}(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}P_2V_2 - \frac{1}{2}P_1V_1.$$

Уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$ в каждом из состояний превращает правую часть в температуры:

$$A_\text{г}^{(12)} = \frac{1}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) = -A \qquad \Longrightarrow \qquad \nu R\,(T_2 - T_1) = -2A.$$

Знак: $T_2 < T_1$, газ остыл.



Процесс 1-2 на диаграмме P–V: работа внешних сил A — площадь бирюзовой трапеции; она равна разности площадей большого треугольника $O\,V_1\,1$ и серого треугольника $O\,V_2\,2$.

2. Первое начало для процесса 1-2. Применим первое начало термодинамики между состояниями 1 и 2: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{\text{г}}^{(12)}$. Изменение внутренней энергии гелия через найденный температурный перепад:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\,\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\cdot(-2A) = -3A,$$
$$Q_{12} = -3A + (-A) = -4A.$$

Знак «минус»: газ в действительности отдаёт теплоту $4A$ — внутренняя энергия упала на $3A$ и ещё внешние силы вложили A.

Пункт 2.

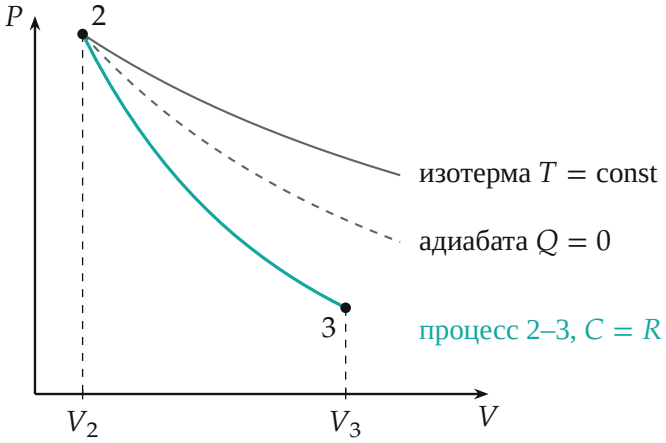
3. Что даёт теплоёмкость $C = R$. По определению молярной теплоёмкости для процесса 2-3 теплота, полученная газом, равна $Q_{23} = \nu C\,(T_3 - T_2) = \nu R\,(T_3 - T_2)$. Условие «работа газа при расширении равна A» даёт $A_{\text{г}}^{(23)} = +A$ (газ расширяется, работа положительна).

4. Первое начало для процесса 2-3. Запишем его между состояниями 2 и 3 с тем же $\nu R\,\Delta T$ и подставим $\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$:

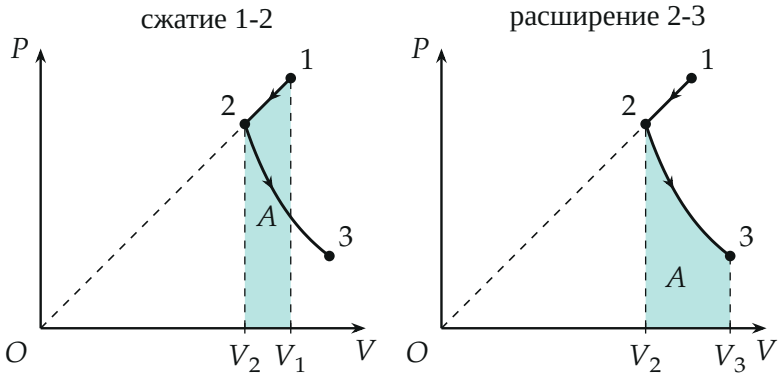
$$\nu R\,\Delta T_{23} = \frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T_{23} + A \quad\Longrightarrow\quad \nu R\,\Delta T_{23} = -2A.$$

Отсюда $Q_{23} = \nu R\,\Delta T_{23} = -2A$, а $\Delta U_{23} = -3A$. Знак «минус»: газ расширяется и совершает работу A, но остывает настолько сильно, что внутренняя энергия падает на $3A$ — работа покрыта лишь частью этой убыли, остальные $2A$ уходят теплотой.

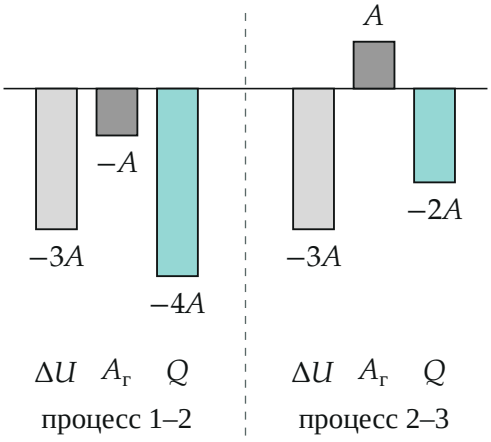
Обратите внимание: «получил теплоту» в вопросе означает величину с учётом знака, и здесь оба ответа отрицательны: в процессе 2-3 газ расширяется, и всё же теплота от него уходит. Причина — процесс идёт круче адиабаты (рисунок ниже): при расширении без теплообмена температура падала бы медленнее.



Из точки 2 расширение возможно по изотерме, по адиабате и по нашей линии: чем круче падает P, тем сильнее остывает газ; выше адиабаты газ получал бы теплоту, ниже — отдаёт. Фрагмент: оси начаты не от нуля.



Процессы в масштабе (взято $V_1 = \sqrt{1{,}5}\,V_2$): площади под линиями 1-2 и 2-3 равны — это и есть условие «работа внешних сил равна работе газа».



Баланс энергии в единицах A: ΔU, работа газа $A_г$ и теплота $Q = \Delta U + A_г$ для обоих процессов.

Проверка. Процесс 1-2 вторым способом: через теплоёмкость. Для $P \propto V$ получаем $\nu C\Delta T = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \frac{1}{2}\nu R\Delta T$, то есть $C = 2R$, и $Q_{12} = 2\nu R\Delta T_{12} = 2\cdot(-2A) = -4A$ — совпало. В процессе 2-3 из $C = R = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n}$ показатель политропы $n = 3$ ($PV^3 = \text{const}$); это та самая линия на рисунке, она действительно идёт круче адиабаты ($n = \frac{5}{3}$), поэтому $Q < 0$. Равенство работ $A_г^{(23)} = -A_г^{(12)}$ даёт $V_3 = V_2/\sqrt{2 - (V_1/V_2)^2}$: процесс 2-3 осуществим при $V_1 < \sqrt{2}\,V_2$ — на рисунке так и сделано, численный расчёт при $\nu R = 1$ дал $Q_{12} = -4A$ и $Q_{23} = -2A$. Размерность: A — энергия. Смысл: в обоих процессах газ остывает с потерей $3A$ внутренней энергии, а теплота равна этой потере минус полученная работа: $-3A - A$ при сжатии и $-3A + A$ при расширении.

Ответ. 1) $Q_{12} = -4A$;
2) $Q_{23} = -2A$.