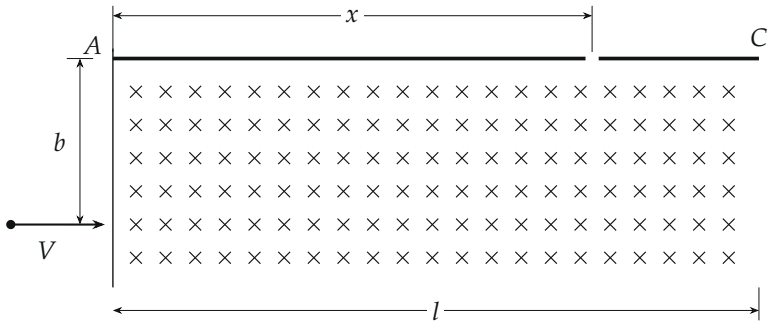
Шарик в магнитном поле и отверстие в стенке

Задача 3. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 3] В область однородного магнитного поля с индукцией $B = 1$ Тл влетает со скоростью $V = 1$ мм/с положительно заряженный шарик очень малого радиуса с отношением заряда к массе $\gamma = q/m = 10^{-2}$ Кл/кг (см. рис.). Направление скорости перпендикулярно направлению магнитного поля и левой границе поля. На расстоянии $b = 15$ см от места, где шарик влетает в область магнитного поля, параллельно его начальной скорости и вектору индукции магнитного поля, располагается непроводящая стенка AC. В стенке на расстоянии $x = 25\sqrt{3}$ см сделано отверстие. Протяжённость l поля достаточно велика.



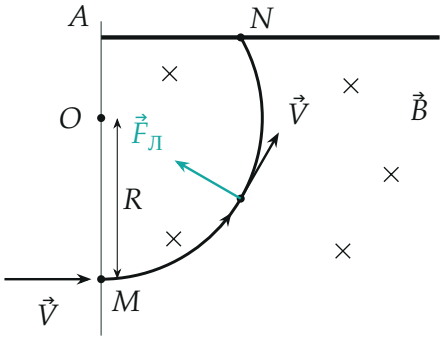
1. Найдите радиус кривизны траектории шарика в поле.
2. Найдите угол между стенкой и вектором скорости шарика непосредственно перед первым ударом.
3. Найдите время движения шарика в поле.

Удары шарика о стенку считать абсолютно упругими. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь. Принять $\pi = 3{,}14$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости, поэтому шарик движется по дуге окружности с постоянной по модулю скоростью. Упругий удар о неподвижную стенку не меняет ни модуль скорости, ни угол с стенкой, а только отражает скорость: поэтому все дуги после первого удара одинаковы, и шарик идёт вдоль стенки равными шагами. Это задача на симметрию: найти геометрию

одной дуги и одного удара, а потом посчитать число повторений до отверстия.

Обозначения. M — точка влёта шарика, A — левый конец стенки, N — точка первого удара, R — радиус окружности, α — угол между стенкой и скоростью перед первым ударом. Поле направлено от нас (крестики на рисунке), для положительного заряда сила Лоренца в точке M направлена вверх, к стенке. Угловая скорость движения по окружности $\omega = V/R$.



Шарик влетает в точке M и идёт по окружности с центром O на границе поля. В каждой точке сила Лоренца направлена к O, скорость — по касательной. Окружность поднимается на $2R = 20$ см выше M, а стенка на $b = 15$ см, поэтому дуга упирается в стенку.

Пункт 1.

1. Модуль скорости постоянен. Двумя способами. Сила Лоренца $q\vec{V} \times \vec{B}$ перпендикулярна скорости, поэтому касательное ускорение равно нулю, $a_\tau = 0$. Она же перпендикулярна перемещению, значит, её работа равна нулю, и по теореме о кинетической энергии кинетическая энергия, а с ней и $|\vec{V}|$, не меняются.

2. Радиус. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление к центру окружности. Только сила Лоренца qVB направлена к центру, и она создаёт центростремительное ускорение V^2/R:

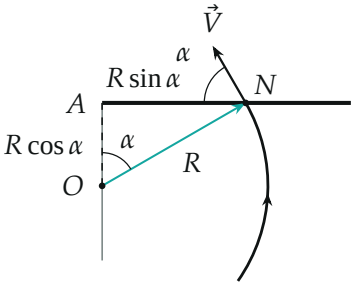
$$\frac{mV^2}{R} = qVB \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{mV}{qB} = \frac{V}{\gamma B},$$

$$R = \frac{10^{-3}\ \text{м/с}}{10^{-2}\ \text{Кл/кг} \cdot 1\ \text{Тл}} = 0{,}1\ \text{м} = 10\ \text{см}.$$

Центр окружности лежит на левой границе поля (скорость перпендикулярна границе, значит, радиус в точке M вдоль границы) на расстоянии $R = 10$ см выше M. Угловая скорость $\omega = V/R = \gamma B = 10^{-2}\ \text{с}^{-1}$ — она одна на всех дугах.

Пункт 2.

3. Угол перед ударом. Пока шарик не коснулся стенки, он движется по окружности, и скорость в точке N перпендикулярна радиусу ON. Стенка горизонтальна, вертикаль к ней перпендикулярна. Угол между скоростью и стенкой равен углу между ON и вертикалью (стороны одного угла перпендикулярны сторонам другого).



Угол α между скоростью и стенкой (справа, у точки N) равен углу при центре O между радиусом ON и вертикалью, потому что их стороны попарно перпендикулярны.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AON: $AO = b - R = 5$ см, $ON = R = 10$ см, угол при O равен α:

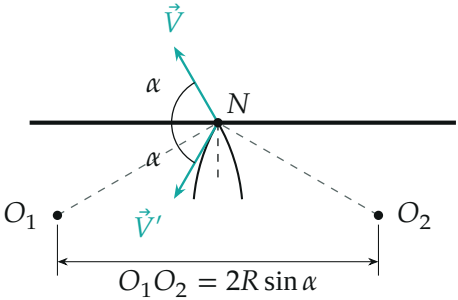
$$\cos\alpha = \frac{b-R}{R} = \frac{15-10}{10} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Второй катет $AN = R\sin\alpha = 5\sqrt{3}$ см$\approx 8{,}7$ см — расстояние от A до точки первого удара. Здесь $R < b < 2R$, поэтому окружность выходит к стенке под острым углом.

Пункт 3.

4. Дуга MN**.** От радиуса OM (вниз) до радиуса ON радиус поворачивается на $\pi - \alpha$: вертикаль MO вместе с OA составляют π, а угол AON равен α. Здесь $\pi - \alpha = 120°$, и шарик проходит дугу за время $t_{MN} = (\pi - \alpha)/\omega = \dfrac{2\pi}{3\gamma B} \approx 209$ с.

5. Удар и вторая окружность. При упругом ударе о неподвижную горизонтальную стенку составляющая скорости вдоль стенки сохраняется, а перпендикулярная меняет знак. Поэтому скорость после удара составляет с стенкой тот же угол α и тот же модуль V, а радиус новой окружности остаётся равным R. Радиус O_2N перпендикулярен новой скорости, значит, он снова наклонён к вертикали на α: центр O_2 лежит на глубине $R\cos\alpha = b - R$ под стенкой, то есть на той же высоте R над линией M, и сдвинут вправо от N на $R\sin\alpha = AN$ (скорость направлена влево-вниз, а вращение против часовой стрелки, поэтому центр справа). Центр сместился на $O_1O_2 = 2R\sin\alpha = 2AN = 10\sqrt{3}$ см.

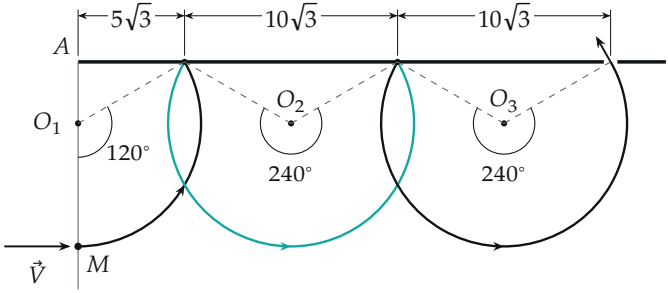


Удар в точке N: скорость до удара $\vec{V}$ и после удара $\vec{V}'$ составляют со стенкой один и тот же угол α; центр окружности переехал из O_1 в O_2 на $2R\sin\alpha$ вдоль линии на высоте R.

6. Куда шарик ударит дальше. Новая окружность вторично пересекает стенку в точке, симметричной N относительно вертикали через O_2, то есть на $2AN$ правее. Так и дальше: точки ударов лежат на расстоянии AN, $3AN$, $5AN$, … от A — каждый раз ещё на $2AN$. Отверстие находится на расстоянии $x = 25\sqrt{3}$ см $= 5\,AN$. Значит, шарик ударится о стенку дважды (в точках AN и $3AN$, $5\sqrt{3}$ и $15\sqrt{3}$ см — там сплошная стенка), а в третий раз прилетит как раз к отверстию и вылетит из поля.

7. Время. Длина дуги между ударами — та часть окружности, которая лежит под стенкой. Часть окружности над стенкой, на которую опирается центральный угол $2\alpha = 120°$, отрезана стенкой, поэтому шарик проходит $2\pi - 2\alpha = 240°$. Дуги: первая $\pi - \alpha = 120°$, вторая и третья по $2\pi - 2\alpha = 240°$. Сумма углов $120° + 240° + 240° = 600° = 5(\pi - \alpha)$, а скорость поворота радиуса постоянна, $\omega = \gamma B$:

$$t = \frac{5(\pi - \alpha)}{\gamma B} = 5\,t_{MN} = \frac{10\pi}{3\gamma B} = \frac{10 \cdot 3{,}14}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1}\ \text{с} \approx 1047\ \text{с} \approx 17{,}5\ \text{мин}.$$



Траектория в масштабе: три дуги (120°, 240°, 240°) и точки ударов через $5\sqrt{3}$, $10\sqrt{3}$, $10\sqrt{3}$ см; в третий раз шарик подходит к отверстию и покидает поле.

Обратите внимание: после первого удара шарик проходит не 120°, а 240° — «длинную» часть окружности под стенкой. Если считать все дуги по 120°, получится время $3t_{MN}$ вместо $5t_{MN}$.

Проверка. Размерность: γB имеет размерность 1/с, поэтому $V/(\gamma B)$ — метры. Предельные случаи для угла: при $b = 2R$ получаем $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0$ — окружность лишь касается стенки; при $b = R$ получаем $\alpha = 90°$ — шарик подходит к стенке перпендикулярно и возвращается по той же дуге. Численное интегрирование уравнений движения дало вылет при $t = 1047{,}2$ с. Смысл: каждый удар сдвигает центр на одно и то же $2AN$, поэтому до отверстия шарик доходит ровно за пять «порций» угла $\pi - \alpha$.

Ответ. 1) $R = \dfrac{V}{\gamma B} = 10$ см; 2) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ (60°); 3) $t = \dfrac{10\pi}{3\gamma B} \approx 1047$ с.