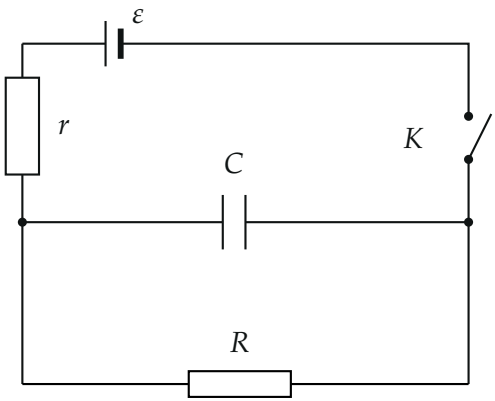
Заряд конденсатора: ток в момент M

Задача 4. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 4] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме. Ключ K разомкнут, режим в цепи установился. Затем ключ замыкают. В некоторый момент M ток через резистор R оказался в 3 раза меньше максимального тока через него.



1. Найдите максимальный ток I_m через R после замыкания ключа.
2. Найдите напряжение U_C на конденсаторе в момент M.
3. Найдите мощность P, развиваемую источником в момент M.

▲ **Решение. Что происходит.** Это переходный процесс в RC-цепи: конденсатор заряжается через резистор r, а резистор R включён параллельно ему. Дифференциальное уравнение здесь не нужно: вопросы заданы про «момент, когда ток в R в три раза меньше максимального», и их решают законами Ома и Кирхгофа для мгновенных значений. Ключевое наблюдение — параллельное соединение: напряжение на R всегда равно напряжению на конденсаторе, $I_R = U_C/R$. Поэтому ток через R ведёт себя так же, как заряжающийся конденсатор, а не так, как ток источника.

Качественная картина. Сразу после замыкания конденсатор не заряжен, $U_C = 0$, и через R тока нет: весь ток источника уходит в конденсатор. По мере зарядки U_C растёт, и ток $I_R = U_C/R$ растёт вместе

с ним, а ток источника $I = (\varepsilon - U_C)/r$ убывает. Ток через R достигает максимума в конце, когда конденсатор зарядился и перестал пропускать ток; момент M — на стадии роста (график ниже).

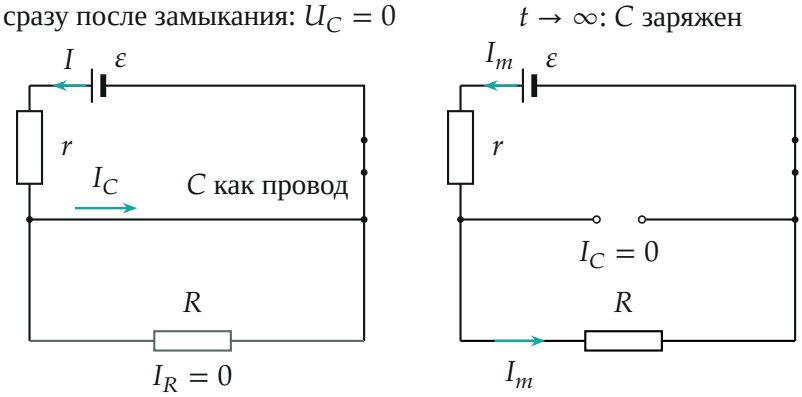
Обозначения. ε — ЭДС источника, I — ток через источник и резистор r, I_C — ток через конденсатор, I_R — ток через резистор R (токи в направлении «от плюса источника»), U_C — напряжение на конденсаторе.

Пункт 1.

1. Когда ток через R максимален. Ток зарядки конденсатора $I_C = I - I_R = \dfrac{\varepsilon - U_C}{r} - \dfrac{U_C}{R}$ положителен, пока $U_C < \dfrac{\varepsilon R}{r+R}$, и обращается в нуль, когда U_C достигает этого значения: тогда заряд перестаёт расти. Значит, U_C приближается к нему снизу и не превышает его, а вместе с ним $I_R = U_C/R$ растёт и не превышает своего предельного значения — это и есть максимальный ток.

2. Установившийся режим. В конце зарядки ток через конденсатор равен нулю, и цепь сводится к последовательному соединению r и R. Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r+R}, \qquad U_{C\infty} = I_m R = \frac{\varepsilon R}{r+R}.$$



Незаряженный конденсатор — проводник (ток мимо R); заряженный — разрыв цепи.

Пункт 2.

3. Напряжение на конденсаторе в момент М. Резистор R и конденсатор соединены параллельно, поэтому $U_C = I_R R$. В момент М $I_R = \frac{1}{3} I_m$:

$$U_C = \frac{1}{3} I_m R = \frac{R\,\varepsilon}{3\,(r+R)}.$$

Это треть установившегося напряжения: конденсатор зарядился лишь на треть от конечного значения.

Пункт 3.

4. Ток источника в момент М. Запишем второе правило Кирхгофа (закон Ома для полной цепи) для контура «источник — r — конденсатор» в момент М: ЭДС источника равна сумме падения напряжения на r и напряжения на конденсаторе. Контур выбран так, чтобы в него вошёл только один неизвестный ток I (ток через r равен току через источник), а U_C уже известно:

$$\varepsilon = Ir + U_C \implies I = \frac{\varepsilon - U_C}{r} = \frac{\varepsilon}{r}\Big(1 - \frac{R}{3(r+R)}\Big) = \frac{\varepsilon\,(3r+2R)}{3r\,(r+R)}.$$

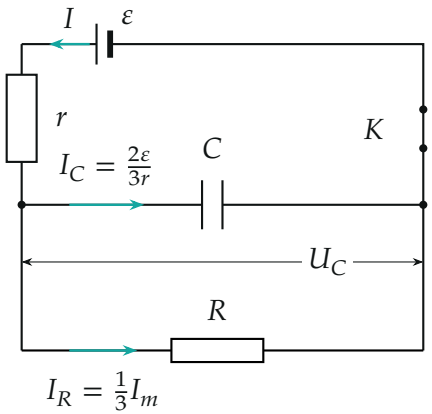
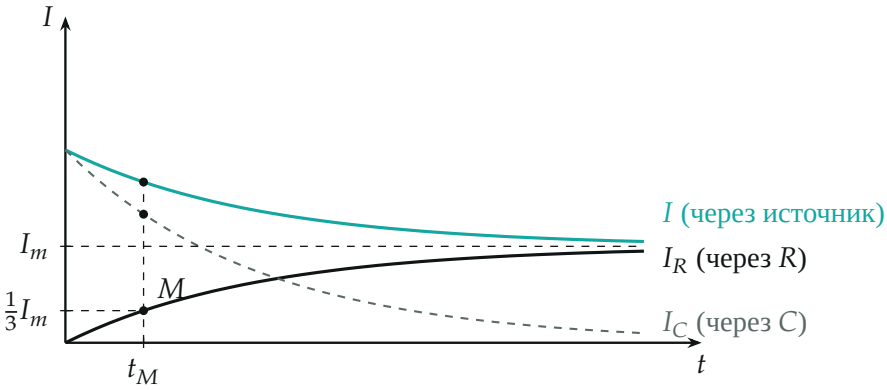


Схема в момент М (ключ замкнут): $I = I_C + I_R$, откуда $I_C = I - I_R = \frac{2\varepsilon}{3r}$; $U_C = I_R R$ и $\varepsilon = Ir + U_C$.

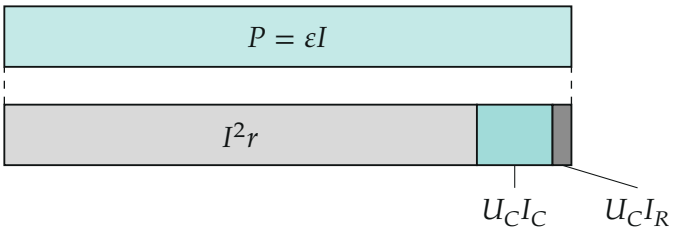
5. Мощность источника. Источник развивает мощность $P = \varepsilon I$ — это работа сторонних сил за единицу времени, она идёт на нагрев r, на нагрев R и на зарядку конденсатора:

$$P = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2 (3r + 2R)}{3r (r + R)}.$$



Токи после замыкания ключа ($r = R$, $\tau = \frac{rR}{r+R}C$): I_R растёт к I_m, I и I_C убывают; $t_M = \tau \ln \frac{3}{2}$.

Обратите внимание: ток через R максимален не сразу после замыкания, а в конце зарядки — в момент замыкания он равен нулю, потому что R подключён параллельно незаряженному конденсатору. Мощность источника — это εI с током через источник, а не с током I_R через R.



Мощность в момент M ($r = R$): $P = I^2 r + U_C I_R + U_C I_C$; в r уходит $\frac{5}{6}$, в конденсатор — $\frac{2}{15}$, в R — $\frac{1}{30}$.

Проверка. Размерность: $\varepsilon/(r+R)$ — ампер, $R\varepsilon/(r+R)$ — вольт, ε^2/r — ватт. Предел: пусть ток через R в k раз меньше максимального, тогда $I = \dfrac{\varepsilon}{r+R}\left(1 + (1-k)\dfrac{R}{r}\right)$. При $k = 1$ получаем $I = \varepsilon/(r+R)$ (зарядка закончена), при $k = 0$ — $I = \varepsilon/r$ (момент замыкания, конденсатор как проводник); наш случай $k = \frac{1}{3}$ даёт найденную формулу. Второй способ для мощности: сумма мощностей потребителей $I^2r + U_C I_R + U_C I_C$ равна εI тождественно (проверено символьно; при $r = R$ в единицах ε^2/R получаем $\frac{25}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{6}$). Численное решение зарядки при $r = R = C = \varepsilon = 1$ даёт $t_M = 0{,}203 = \tau \ln 1{,}5$ и $I = 0{,}833 = 5/6$. Смысл: конденсатор на момент М ещё не заряжен до конца, поэтому источник отдаёт заметно больший ток, чем в установившемся режиме.

Ответ. 1) $I_m = \dfrac{\varepsilon}{r+R}$;

2) $U_C = \dfrac{R\varepsilon}{3(r+R)}$;

3) $P = \dfrac{\varepsilon^2(3r+2R)}{3r(r+R)}$.