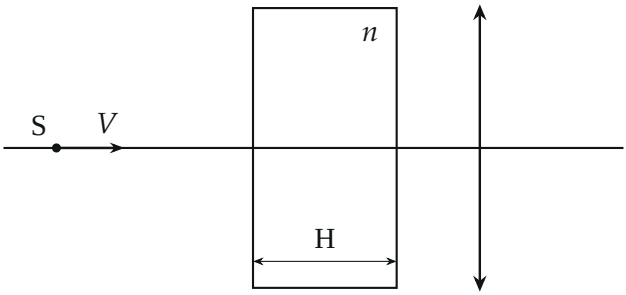
Мошка (муравей), линза и пластина

Задача 5. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 5] Мошка S летит со скоростью $V = 4$ см/с вдоль главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см (см. рис.). Между мошкой и линзой, перпендикулярно главной оптической оси, расположена стеклянная пластина толщиной $H = 5$ см с показателем преломления $n = 5/3$. В некоторый момент мошка находится на расстоянии $d = 22$ см от линзы.



1. На каком расстоянии от линзы находилось бы изображение мошки при отсутствии пластины?
2. На каком расстоянии от линзы находится изображение мошки при наличии пластины?
3. С какой скоростью движется изображение мошки при наличии пластины?

▲ **Решение. Что происходит.** Тонкая линза и плоскопараллельная пластина — два отдельных шага. Пластина преломляет пучок на двух гранях и выпускает его параллельно входному, но сдвинутым: для линзы всё выглядит так, будто мошка находится не в точке S, а в точке S', ближе к линзе. Дальше обычная формула линзы для источника S'. Скорость изображения находим дифференцированием формулы линзы: изображение движется быстрее мошки в Γ^2 раз, где Γ — поперечное увеличение (продольное увеличение равно квадрату поперечного).

Обозначения. Все расстояния отсчитываем вдоль оси от линзы. $d = 22$ см — расстояние от мошки до линзы, d_2 — расстояние от S' (кажуще-

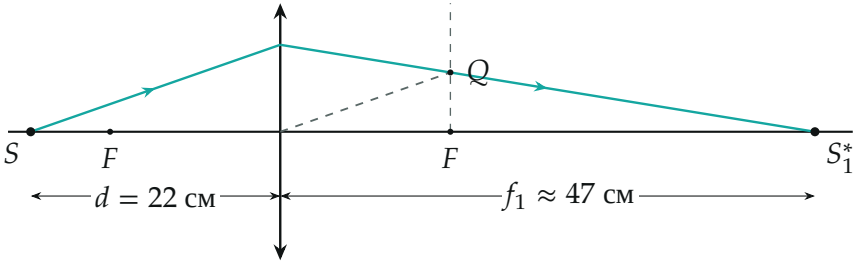
гося положения мошки) до линзы, f_1 и f_2 — расстояния от линзы до изображения без пластины и с пластиной, Δ — смещение $S \to S'$, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение. Лучи считаем параксиальными (близкими к оси); линзовая формула $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$ для действительного изображения.

Пункт 1.

1. Изображение без пластины. Применим формулу тонкой линзы для мошки на расстоянии d:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \quad \Longrightarrow \quad f_1 = \frac{dF}{d - F} = \frac{22 \cdot 15}{22 - 15} \approx 47 \text{ см}.$$

Так как $d > F$, изображение действительное и лежит за линзой. Построим его: луч из S в точку линзы на высоте h; параллельный ему вспомогательный луч идёт через центр линзы без преломления и пересекает фокальную плоскость в точке Q; преломлённый луч проходит через ту же точку Q и пересекает ось в изображении S_1^*.



Изображение мошки без пластины: $f_1 \approx 47$ см (в масштабе по горизонтали; высота лучей условная).

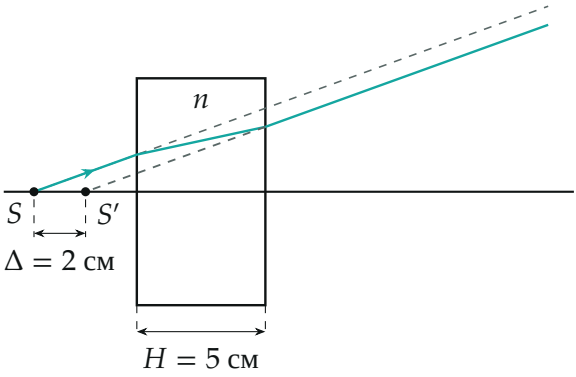
Пункт 2.

2. Что делает пластина. Луч из S, составляющий с осью малый угол θ, падает на пластину и преломляется: $\sin\theta = n\sin\varphi$, для малых углов $\varphi \approx \theta/n$. Внутри пластины он идёт под углом φ и сдвигается к оси на $H\varphi = H\theta/n$ вместо $H\theta$, а на второй грани преломляется обратно и выходит снова под углом θ, то есть параллельно первоначальному. Выходящий луч поэтому лежит ниже прямого на $H\theta\,(1 - 1/n)$. Продолжим

его назад до оси: поперечный сдвиг $H\theta(1-1/n)$ при угле θ означает продольный сдвиг

$$\Delta = \frac{H\theta\,(1-1/n)}{\theta} = \frac{n-1}{n}\,H = \frac{2/3}{5/3}\cdot 5\text{ см} = 2\text{ см}.$$

Все лучи пучка сдвигаются одинаково, значит, все они выходят из пластины так, будто идут из точки S' — на Δ ближе к линзе. Угол θ сократился — поэтому сдвиг не зависит от направления луча (для параксиальных лучей).



Ход луча через пластину (по вертикали масштаб растянут, угол на самом деле мал): выходящий луч параллелен падающему и идёт так, будто выходит из S', смещённой на $\Delta = 2$ см к линзе.

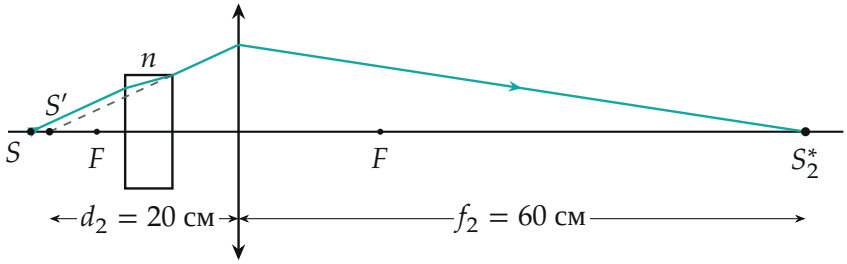
3. Изображение с пластиной. Линзе безразлично, что пучок прошёл пластину: она «видит» точечный источник S' на расстоянии

$$d_2 = d - \Delta = 22 - 2 = 20\text{ см}.$$

Снова формула тонкой линзы, теперь для S':

$$f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = \frac{20\cdot 15}{20-15} = 60\text{ см}.$$

Изображение отодвинулось от линзы: с 47 см до 60 см — источник «приблизился» к линзе, а изображение удаляется.



Лучи от мошки с пластиной (масштаб по горизонтали соблюдён): после пластины луч идёт так, будто выходит из S', и линза собирает его в S_2^* на расстоянии 60 см.

Пункт 3.

4. Ключ: как связаны скорости. Пластина неподвижна и смещение Δ постоянно, поэтому S' движется с той же скоростью V, что и мошка: $\dot{d}_2 = -V$ (расстояние уменьшается). Дифференцируем формулу линзы $\dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$ по времени:

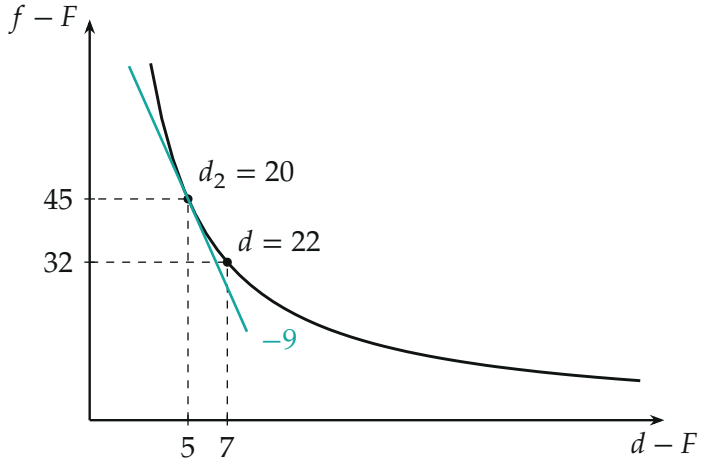
$$-\frac{\dot{d}_2}{d_2^2} - \frac{\dot{f}}{f^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{f} = -\Big(\frac{f}{d_2}\Big)^2 \dot{d}_2 = \Gamma^2 V, \qquad \Gamma = \frac{f_2}{d_2} = \frac{60}{20} = 3.$$

Скорость изображения $u = \Gamma^2 V = 9 \cdot 4$ см/с $= 36$ см/с, направлена от линзы: $\dot{f} > 0$, потому что $\dot{d}_2 < 0$.

5. Вторым способом — по формуле Ньютона. Формулу линзы можно записать как $(d_2 - F)(f - F) = F^2$. Продифференцируем:

$$\dot{d}_2\,(f - F) + \dot{f}\,(d_2 - F) = 0 \implies \dot{f} = \frac{f - F}{d_2 - F}\,V = \frac{45}{5}\,V = 9V = 36 \text{ см/с}.$$

Совпало: здесь $\dfrac{f - F}{d_2 - F} = \dfrac{F^2}{(d_2 - F)^2} = \Gamma^2$, так как $\Gamma = \dfrac{F}{d_2 - F}$.



Формула Ньютона $(d-F)(f-F)=F^2$ — гипербола в осях $d-F$ и $f-F$ (в см). Скорость изображения — наклон касательной (бирюзовая) в точке $d_2=20$ см: он равен -9, значит, при сдвиге мошки на δ к линзе изображение уезжает на 9δ.

Обратите внимание: скорость изображения равна не $\Gamma V=12$ см/с, а $\Gamma^2 V=36$ см/с — поперечное увеличение показывает, во сколько раз изображение больше предмета поперёк оси, а вдоль оси растяжение — в Γ^2 раз.

Проверка. Размерность: $dF/(d-F)$ — сантиметры, $\Gamma^2 V$ — скорость. Предел: при $n\to 1$ или $H\to 0$ имеем $\Delta=0$, $d_2=d$ и $f_2=f_1\approx 47$ см; пластина с $n>1$ сдвигает источник к линзе и удаляет изображение: $60>47$ — верно. Численное дифференцирование $f(t)$ при $d_2=20-Vt$ даёт $\dot f(0)=36{,}0$ см/с. Смысл: изображение движется быстрее самой мошки, потому что вблизи фокуса малое смещение предмета сильно двигает изображение.

Ответ. 1) $f_1=\dfrac{dF}{d-F}\approx 47$ см;

2) $f_2=\dfrac{(d-\Delta)F}{d-\Delta-F}=60$ см, $\Delta=\dfrac{n-1}{n}H=2$ см;

3) $u=\Gamma^2 V=9V=36$ см/с, от линзы.