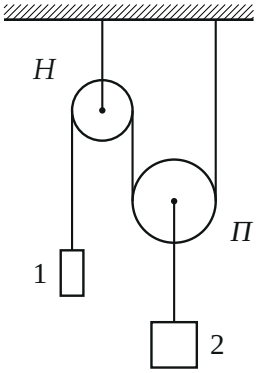
Грузы на подвижном и неподвижном блоках

Задача 1. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 1] Система состоит из неподвижного блока H, подвижного блока $П$ и двух грузов 1 и 2 (см. рис.). Груз 1 движется с ускорением $a_1 = g/5$, направленным вниз.



1. Найдите ускорение груза 2.
2. Найдите отношение масс грузов 1 и 2.

Массами нитей, блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику связанных тел с подвижным блоком. Нить одна, лёгкая и нерастяжимая, блоки невесомые и без трения — значит, натяжение T всей нити одинаково. Груз 1 висит на одном конце нити, а подвижный блок с грузом 2 держат два её куска. Отсюда два следствия: груз 2 движется вдвое медленнее груза 1 (кинематическая связь), а тянет его вверх сила $2T$. Дальше — второй закон Ньютона для каждого груза.

Обозначения. m_1, m_2 — массы грузов; T — натяжение нити; $a_1 = g/5$ — ускорение груза 1 (вниз); a_2 — ускорение груза 2; y_1 — расстояние от оси блока H до груза 1, $y_П$ — от потолка до оси блока $П$ (рис. ниже).

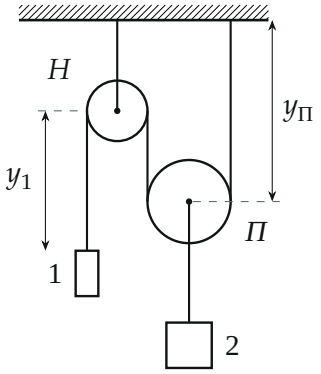
Пункт 1.

1. Связь перемещений. Длина нити складывается из куска y_1 до груза 1, двух вертикальных кусков у блока $П$ (каждый меняется так же, как

$y_П$) и постоянных дуг на блоках:

$$L = y_1 + 2y_П + \text{const}.$$

Нить нерастяжима, $L = \text{const}$, поэтому $\Delta y_1 = -2\Delta y_П$: груз 1 опустился на x — блок $П$ вместе с грузом 2 поднялся на $x/2$.



Координаты для кинематической связи: нить $L = y_1 + 2y_П + const$.

2. Ускорение груза 2. Перемещения связаны в любой момент, значит, так же связаны скорости и ускорения:

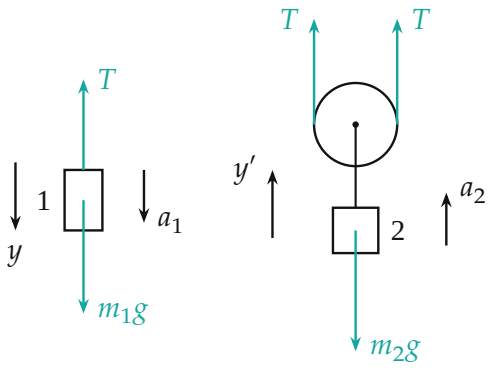
$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{g}{10} = 1\ \text{м/с}^2 \quad (g = 10\ \text{м/с}^2),$$

направлено вверх (груз 1 идёт вниз, груз 2 — вверх).

Пункт 2.

3. Силы на груз 1. На груз 1 действуют сила тяжести $m_1 g$ вниз и натяжение нити T вверх. Второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вниз (туда ускорение):

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \ \Rightarrow\ T = m_1(g - a_1) = \frac{4}{5} m_1 g.$$



Силы на груз 1 и на систему «блок П + груз 2» (блок невесомый): нить тянет блок двумя кусками, каждый с силой T.

4. Силы на блок *П* с грузом 2. Блок невесомый, поэтому удобно рассматривать систему «блок + груз 2»: вверх её тянут два куска нити, вниз — сила тяжести m_2g. Второй закон Ньютона в проекции на ось y' вверх:

$$2T - m_2g = m_2a_2.$$

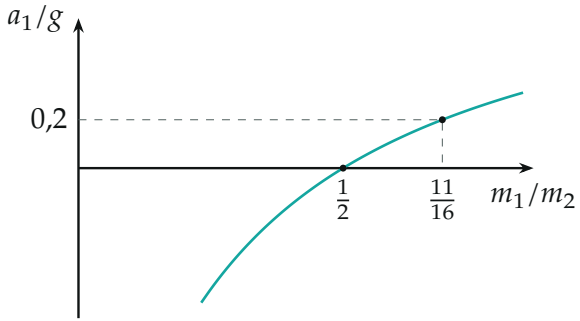
5. Отношение масс. Подставим $T = \frac{4}{5}m_1g$ и $a_2 = g/10$:

$$\frac{8}{5}m_1g - m_2g = \frac{1}{10}m_2g \;\Rightarrow\; \frac{8}{5}m_1 = \frac{11}{10}m_2 \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{11}{16}.$$

Второй способ (общая формула). Из двух уравнений в общем виде $T = m_1(g - a_1)$, $2m_1(g - a_1) = m_2\left(g + \frac{a_1}{2}\right)$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g + a_1/2}{2(g - a_1)} = \frac{1{,}1}{1{,}6} = \frac{11}{16}.$$

При $a_1 = 0$ формула даёт $m_1/m_2 = 1/2$ — условие равновесия: одна ветвь нити держит груз 1, две — груз 2.



Ускорение груза 1 (вниз — плюс) в зависимости от отношения масс по формуле $a_1/g = (2m_1 - m_2)/(2m_1 + m_2/2)$*: при* $m_1/m_2 = 1/2$ *равновесие, нашему* $a_1 = g/5$ *отвечает* $11/16$.

Обратите внимание. Ускорения грузов разные: $a_2 = a_1/2$. Записав в уравнениях одно ускорение a, как для блока без подвижного блока, получим неверное отношение масс.

Ответ (матрёшкой).

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{g}{10} = 1 \text{ м/с}^2, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{g + a_1/2}{2(g - a_1)} = \frac{11}{16}.$$

Проверка. Отношение $\frac{g+a_1/2}{g-a_1}$ безразмерно. Груз 1 опускается с ускорением, значит, он «перетягивает» груз 2, и m_1/m_2 должно быть больше равновесного $1/2$ — так и есть, $11/16 > 1/2$. Предел $a_1 \to g$ (свободное падение груза 1) требует $m_2 \to 0$ — формула даёт $m_1/m_2 \to \infty$.

Смысл: подвижный блок даёт выигрыш в силе вдвое и проигрыш в пути (и ускорении) вдвое.

Ответ. 1) $a_2 = \frac{g}{10} = 1$ м/с^2, вверх; 2) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{11}{16}$.