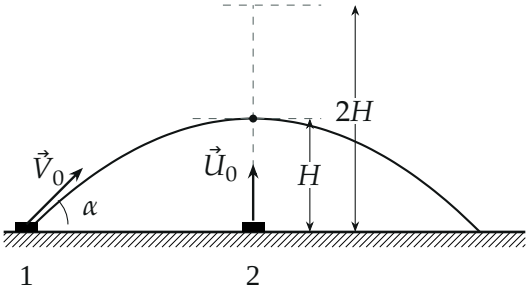
Две пушки: столкновение снарядов

Задача 2. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 2] Пушка 1 установлена так, что может производить выстрелы снарядами под углом α к горизонту с неизменной (от выстрела к выстрелу) начальной скоростью V_0. Пушка 2 расположена на горизонтальной поверхности Земли, на одной вертикали с точкой, в которой снаряды, выпущенные из пушки 1, достигают максимальной высоты. Пушка 2 может производить выстрелы снарядами вертикально вверх с некоторой другой неизменной (от выстрела к выстрелу) начальной скоростью.

1. Из пушек 1 и 2 поочередно выпускаются снаряды. Найдите начальную скорость снарядов, выпускаемых из пушки 2, если максимальная высота их подъёма вдвое больше, чем максимальная высота подъёма снарядов, выпускаемых из пушки 1.
2. Через какое время после выстрела из пушки 1 должна выстрелить пушка 2, чтобы произошло столкновение снарядов?

Сопротивление воздуха не учитывать.



Поясняющий рисунок: снаряд 1 летит по параболе, пушка 2 — под её вершиной; высота подъёма снаряда 2 вдвое больше.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, и тела, брошенного вертикально. Без сопротивления воздуха оба снаряда движутся с ускорением $\vec{g}$, и движение раскладывается на независимые горизонтальное (равномерное) и вертикальное (равноускоренное). Вершина траектории снаряда 1 лежит ров-

но над пушкой 2, а снаряд 2 движется только по вертикали — поэтому встретиться они могут только в этой вершине. Остаётся подобрать момент выстрела пушки 2 так, чтобы её снаряд оказался на высоте H одновременно со снарядом 1.

Обозначения. H — максимальная высота снаряда 1; U_0 — начальная скорость снаряда 2; t_1 — время полёта снаряда 1 до вершины; t_2 — время полёта снаряда 2 до встречи; $\Delta t = t_1 - t_2$ — задержка выстрела пушки 2. Ось x — горизонтально от пушки 1, ось y — вертикально вверх.

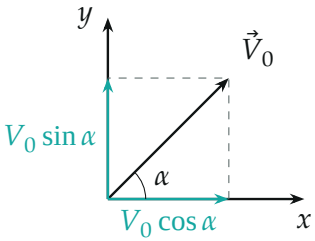
Пункт 1.

1. Высота подъёма снаряда 1. Проекции начальной скорости: $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$, $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$. По оси y движение равнозамедленное, в вершине $V_y = 0$. Формула для равноускоренного движения $V_y^2 - V_{0y}^2 = -2gH$:

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

2. Скорость снаряда 2. Для вертикального броска та же формула даёт высоту подъёма $U_0^2/(2g)$. По условию она равна $2H$:

$$\frac{U_0^2}{2g} = 2 \cdot \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \;\Rightarrow\; U_0 = \sqrt{2}\, V_0 \sin\alpha.$$



Проекции начальной скорости снаряда 1 на оси.

Пункт 2.

3. Где возможна встреча. Снаряд 2 всё время на вертикали пушки 2. Снаряд 1 по горизонтали движется равномерно и проходит эту вертикаль один раз — в вершине, на высоте H, в момент

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

(вертикальная скорость $V_0 \sin\alpha - gt$ обращается в ноль).

4. Когда снаряд 2 на высоте H. Закон движения снаряда 2 по оси y: $y = U_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$. Условие $y(t_2) = H$:

$$\frac{gt_2^2}{2} - U_0 t_2 + H = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{U_0 \mp \sqrt{U_0^2 - 2gH}}{g}.$$

Подставим $U_0^2 = 2V_0^2 \sin^2\alpha$ и $2gH = V_0^2 \sin^2\alpha$: $\sqrt{U_0^2 - 2gH} = V_0 \sin\alpha$,

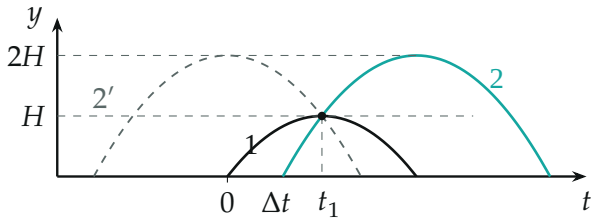
$$t_2 = (\sqrt{2} \mp 1)\frac{V_0 \sin\alpha}{g}.$$

Два корня: снаряд 2 проходит высоту H дважды — на подъёме $(\sqrt{2}-1)$ и на спуске $(\sqrt{2}+1)$.

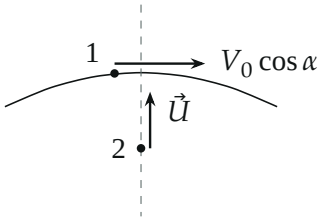
5. Задержка выстрела. $\Delta t = t_1 - t_2$. Для корня на подъёме

$$\Delta t = (1 - (\sqrt{2}-1))\frac{V_0 \sin\alpha}{g} = (2-\sqrt{2})\frac{V_0 \sin\alpha}{g} \approx 0{,}59\,\frac{V_0 \sin\alpha}{g} > 0.$$

Для корня на спуске $\Delta t = -\sqrt{2}\,V_0 \sin\alpha / g < 0$ — пушка 2 должна была бы выстрелить раньше пушки 1. Из пушек стреляют поочерёдно, первой — пушка 1, поэтому этот корень отбрасываем.



Высоты снарядов в зависимости от времени (по вычисленным точкам; единица времени $V_0 \sin\alpha/g$): чёрная — снаряд 1, бирюзовая — снаряд 2 при выстреле через $\Delta t = (2-\sqrt{2})V_0 \sin\alpha/g$; они пересекаются в момент t_1 на высоте H. Серый пунктир $2'$ — второй корень: выстрел раньше пушки 1, встреча на спуске.



Незадолго до встречи: снаряд 1 подлетает к вершине почти горизонтально, снаряд 2 поднимается по вертикали пушки 2; на высоте H его скорость $U = V_0 \sin\alpha$ (второй способ ниже).

Второй способ (через скорость на высоте H). Скорость снаряда 2 на высоте H найдём из $U^2 = U_0^2 - 2gH = V_0^2 \sin^2\alpha$, то есть $U = V_0 \sin\alpha$ — ровно та вертикальная скорость, с которой стартовал снаряд 1. Значит, на подъёме от H до вершины $2H$ снаряд 2 повторяет вертикальное движение снаряда 1 от земли до H и тратит на это t_1; весь подъём длится $U_0/g = \sqrt{2}\,t_1$, и до высоты H снаряд 2 летит $t_2 = (\sqrt{2}-1)t_1$ — то же.

Обратите внимание. Квадратное уравнение даёт два момента прохождения высоты H; выбирать корень нужно по условию задачи — пушка 2 стреляет после пушки 1. Угол α и горизонтальная скорость в ответ не входят: время до вершины задаёт только вертикальная проекция $V_0 \sin\alpha$.

Ответ (матрёшкой).

$$U_0 = \sqrt{2gH}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}\,V_0\sin\alpha,$$

$$\Delta t = \frac{V_0\sin\alpha}{g} - \frac{U_0 - \sqrt{U_0^2 - 2gH}}{g} = (2-\sqrt{2})\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

Проверка. Размерность: $[V_0/g]$ = м/с : м/с^2 = с. Подстановка: при $t_2 = (\sqrt{2}-1)t_1$ высота снаряда 2 равна $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ в единицах $V_0^2\sin^2\alpha/g$, то есть H — верно. $0 < \Delta t < t_1$: пушка 2 стреляет, пока снаряд 1 ещё летит вверх.

Смысл: снаряд 2 вылетает быстрее, поэтому ему нужно меньше времени до высоты H, чем снаряду 1, и стартовать он должен позже.

Ответ. 1) $U_0 = \sqrt{2}\,V_0\sin\alpha$; 2) $\Delta t = (2-\sqrt{2})\dfrac{V_0\sin\alpha}{g}$.