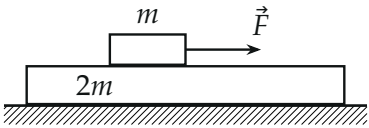
Брусок на доске, сила на бруске

Задача 3. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 3] На гладкой горизонтальной поверхности расположена доска массой $2m$, на которой лежит брусок массой m. Коэффициент трения между бруском и доской μ.



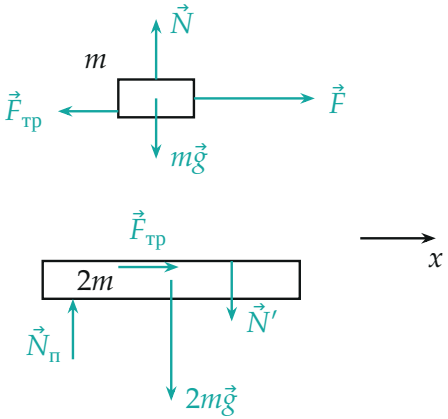
1. Какую минимальную горизонтальную силу $F_{\text{мин}}$ надо приложить к бруску, чтобы он начал двигаться относительно доски?
2. За какое время брусок переместится относительно доски на расстояние L, если к нему приложить силу $F > F_{\text{мин}}$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику системы «брусок на доске» с трением между ними. Доску разгоняет только сила трения со стороны бруска (снизу поверхность гладкая), а сила трения покоя не может превысить μmg. Значит, ускорение доски не больше $\mu g/2$. Пока сила F мала, брусок и доска едут вместе; когда для совместного движения доске потребуется трение больше μmg, брусок начнёт скользить. Дальше — второй закон Ньютона для каждого тела и движение бруска относительно доски.

Обозначения. a_1 — ускорение бруска, a_2 — ускорение доски (относительно земли); $F_{\text{тр}}$ — сила трения между бруском и доской; N — сила реакции доски на брусок; ось x — горизонтально по силе $\vec{F}$.

Пункт 1.

1. Силы. На брусок: $\vec{F}$, сила трения со стороны доски $\vec{F}_{\text{тр}}$ (против $\vec{F}$: доска «удерживает» брусок), $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. На доску: по третьему закону Ньютона — трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ вперёд и давление бруска N вниз, сила тяжести $2m\vec{g}$ и реакция пола. Трения о пол нет.



Силы на брусок (вверху) и на доску (внизу), каждое тело отдельно: трение действует на брусок назад, на доску — вперёд; $N' = N = mg$ — давление бруска на доску, N_n — реакция пола.

2. Граница совместного движения. Пока брусок не скользит, тела движутся с общим ускорением a. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$\text{брусок: } F - F_{\text{тр}} = ma, \qquad \text{доска: } F_{\text{тр}} = 2ma.$$

Отсюда $a = \dfrac{F}{3m}$ и нужное доске трение $F_{\text{тр}} = \dfrac{2}{3}F$. Трение покоя не больше $\mu N = \mu mg$; скольжение начнётся, когда $\frac{2}{3}F$ достигнет μmg:

$$F_{\text{мин}} = \frac{3}{2}\,\mu mg.$$

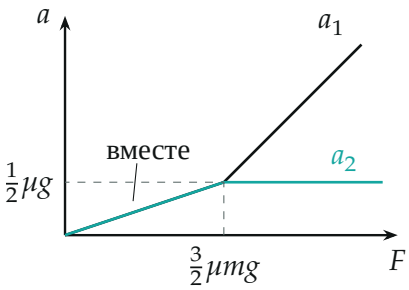
При этом ускорение доски уже максимально: $a = \mu g/2$.

Пункт 2.

3. Ускорения при скольжении. При $F > F_{\text{мин}}$ брусок скользит, сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$\text{брусок: } F - \mu mg = ma_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{F}{m} - \mu g;$$

$$\text{доска: } \mu mg = 2ma_2 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{\mu g}{2}.$$



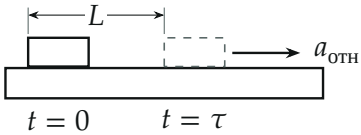
Ускорения бруска a_1 и доски a_2 в зависимости от силы (по вычисленным точкам): до $F_{мин}$ общая прямая $F/(3m)$, после — ускорение доски застывает на $\mu g/2$, брусок разгоняется сильнее.

4. Движение относительно доски. Перейдём в систему отсчёта доски. Брусок в ней стартует из покоя (в момент приложения силы тела покоились) с ускорением

$$a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{F}{m} - \frac{3}{2}\mu g = \frac{2F - 3\mu mg}{2m} > 0.$$

Путь при равноускоренном движении из покоя $L = \dfrac{a_{\text{отн}}\tau^2}{2}$:

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{отн}}}} = \sqrt{\frac{4mL}{2F - 3\mu mg}}.$$



В системе отсчёта доски брусок из покоя проходит L с ускорением $a_{отн} = a_1 - a_2$.

Второй способ (в системе отсчёта земли). Перемещения за время τ: бруска $x_1 = a_1\tau^2/2$, доски $x_2 = a_2\tau^2/2$. Брусок сместился относительно доски на $x_1 - x_2 = (a_1 - a_2)\tau^2/2 = L$ — то же уравнение.

Обратите внимание. В пункте 1 нельзя приравнять $F_{\text{мин}}$ к μmg: доска не закреплена и едет вместе с бруском, поэтому часть силы F уходит на разгон доски. Ускорение доски ограничено сверху: при любой силе оно не больше $\mu g/2$.

Ответ (матрёшкой).

$$F_{\text{мин}} = \frac{m+2m}{2m}\,\mu mg = \frac{3}{2}\,\mu mg,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{\dfrac{F}{m} - \mu g - \dfrac{\mu g}{2}}} = \sqrt{\frac{4mL}{2F - 3\mu mg}}.$$

Проверка. Размерность: $[mL/F] = \text{кг}\cdot\text{м}/(\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2) = \text{с}^2$, под корнем — секунды в квадрате. Пределы: $F \to F_{\text{мин}}$ даёт $\tau \to \infty$ — брусок почти не отстаёт от доски; $\mu \to 0$ даёт $\tau = \sqrt{2mL/F}$ — брусок разгоняется сам, доска стоит. При $F = F_{\text{мин}}$ формулы пунктов 1 и 2 сшиваются: $a_1 = a_2 = \mu g/2$ (рис. с графиком).

Смысл: доска «отстаёт» потому, что разогнать её может только ограниченное трение.

Ответ. 1) $F_{\text{мин}} = \dfrac{3}{2}\,\mu mg$; 2) $\tau = \sqrt{\dfrac{4mL}{2F - 3\mu mg}}$.