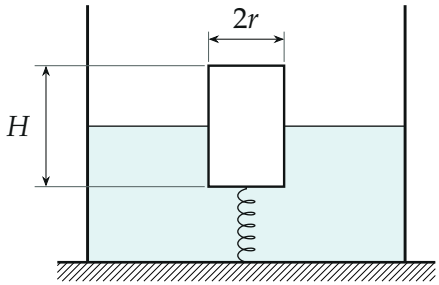
Цилиндр на пружине в сосуде с водой

Задача 4. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 4] Круглый цилиндр высоты H и радиусом r прикреплён легкой пружиной жесткостью K ко дну цилиндрического сосуда с водой (см. рис.). Стенки сосуда вертикальны. Первоначально цилиндр погружен в воду на половину своего объёма, а пружина не деформирована. Воду доливают в сосуд так, что уровень воды совпадает с верхней поверхностью цилиндра. Плотность воды ρ.



1. Найдите массу цилиндра.
2. Найдите изменение высоты уровня воды в сосуде после долива воды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тела в жидкости (закон Архимеда) с пружиной. Вначале пружина не деформирована, поэтому цилиндр держит одна сила Архимеда — отсюда его масса. После долива цилиндр погружён целиком, сила Архимеда растёт и тянет его вверх; пружина, прикреплённая ко дну, растягивается и удерживает его. Цилиндр при этом поднимается на растяжение пружины Δl, и вода должна подняться не только до прежнего верха цилиндра, но и ещё на Δl.

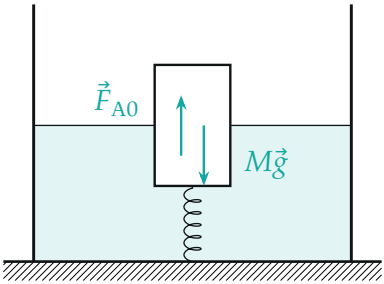
Обозначения. M — масса цилиндра; $S = \pi r^2$ — площадь его основания; F_{A0}, F_A — силы Архимеда до и после долива; Δl — растяжение пружины в конце; h — изменение уровня воды. Ось y — вертикально вверх.

Пункт 1.

1. Равновесие вначале. На цилиндр действуют сила тяжести $M\vec{g}$ вниз и сила Архимеда вверх; пружина не деформирована — её силы нет. Под водой половина объёма, $V_{\text{погр}} = \frac{1}{2}SH$, поэтому по закону Архимеда $F_{\text{A0}} = \rho g \cdot \frac{1}{2}SH$. Условие равновесия в проекции на ось y:

$$\rho g \frac{SH}{2} - Mg = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 H.$$

Плотность цилиндра — половина плотности воды.



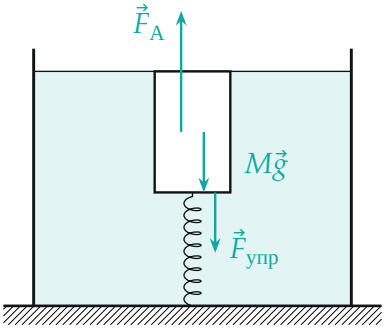
Вначале: пружина не деформирована, вес цилиндра уравновешен силой Архимеда для погружённой половины.

Пункт 2.

2. Равновесие в конце. Цилиндр погружён целиком: $F_{\text{A}} = \rho g SH$ — вдвое больше веса. Цилиндр поднимается, пружина растягивается на Δl и тянет его вниз с силой $K\Delta l$ (закон Гука). Условие равновесия в проекции на ось y:

$$\rho g SH - Mg - K\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; K\Delta l = \rho g SH - \frac{1}{2}\rho g SH = \frac{1}{2}\rho g \pi r^2 H,$$

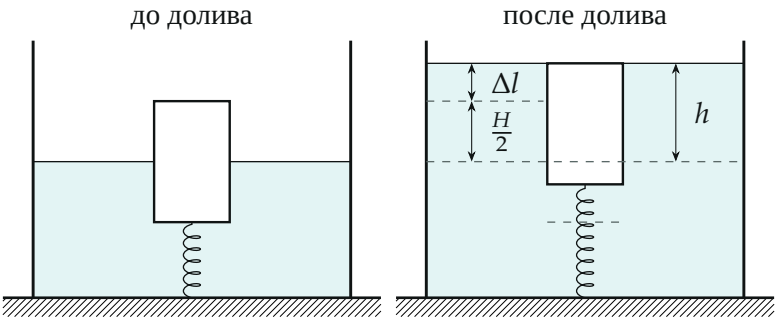
$$\Delta l = \frac{\rho g \pi r^2 H}{2K}.$$



После долива: сила Архимеда $F_A = 2Mg$; вниз — вес и сила растянутой пружины, $F_{упр} = K\Delta l = Mg$ (стрелки в масштабе).

3. Изменение уровня. Вначале уровень воды был на середине цилиндра. Нижнее основание цилиндра поднялось на Δl, значит, верхнее оказалось на $\frac{H}{2}+\Delta l$ выше прежнего уровня воды. Новый уровень совпадает с верхним основанием:

$$h = \frac{H}{2} + \Delta l = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{\pi r^2 \rho g}{K}\right).$$



До и после долива. Пунктир — прежний уровень воды и прежнее положение низа цилиндра; уровень поднялся на $h = \frac{H}{2} + \Delta l$.

Второй способ (через силу пружины). Сила пружины в конце равна приросту силы Архимеда: $K\Delta l = \rho g S \cdot \frac{H}{2}$ — добавочно погрузилась ровно верхняя половина цилиндра. Это то же уравнение шага 2, записанное без M.

Обратите внимание. Ответ $h = H/2$ неверен: цилиндр не стоит на месте, а всплывает вслед за водой, пока его не остановит пружина. Площадь сосуда в ответ не входит — она определила бы только, сколько воды пришлось долить.

Ответ (матрёшкой).

$$M = \rho \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 H, \qquad h = \frac{H}{2} + \frac{\rho g \pi r^2 \cdot \frac{H}{2}}{K} = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{\pi r^2 \rho g}{K}\right).$$

Проверка. Размерность: $\pi r^2 \rho g$ — это $\text{м}^2 \cdot \text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н/м}$, как у K, так что $\pi r^2 \rho g / K$ безразмерна, h в метрах. Пределы: очень жёсткая пружина $K \to \infty$ — цилиндр не сдвинется, $h \to H/2$; мягкая пружина — цилиндр уходит вверх далеко, h растёт.

Смысл: доливая воду, мы «выталкиваем» цилиндр, и пружина растягивается на величину, при которой её сила равна лишней силе Архимеда.

Ответ. 1) $M = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 H$; 2) $h = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{\pi r^2 \rho g}{K}\right)$.