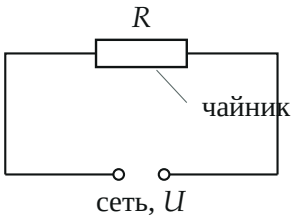
Электрочайник: мощность и время закипания

Задача 5. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 5] В первом случае в электрический чайник налили некоторое количество воды и включили его в электрическую сеть. При этом вода в чайнике закипела через время τ_1 после его включения. Во втором случае объём налитой в чайник воды увеличили в 3 раза, а напряжение в сети уменьшилось на 10%.

1. Найдите отношение электрических мощностей, потребляемых чайником во втором и первом случаях.
2. Через какое время после включения вода закипит во втором случае?

Сопротивление нагревательного элемента чайника считать не зависящим от температуры. Потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: нагревательный элемент сопротивлением R включён в сеть с напряжением U.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Джоуля–Ленца и тепловой баланс. Сопротивление нагревателя постоянно, поэтому мощность зависит только от напряжения, как U^2/R. Потерь нет: вся выделенная за время нагрева теплота идёт на нагрев воды до кипения, а нужная теплота пропорциональна массе воды. Время нагрева — теплота, делённая на мощность.

Обозначения. R — сопротивление нагревателя; U — напряжение в первом случае, $0{,}9U$ — во втором; P_1, P_2 — мощности; m — масса воды в первом случае, $3m$ — во втором (плотность одна, масса пропорциональна объёму); c — удельная теплоёмкость воды; T_0 — начальная

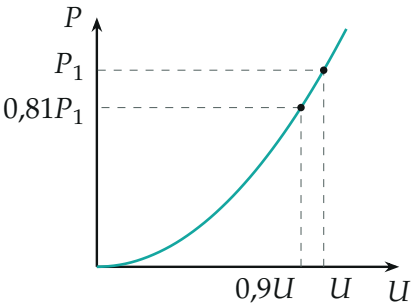
температура воды (одна и та же), $T_к$ — температура кипения; τ_2 — искомое время.

Пункт 1.

1. Мощность нагревателя. Закон Джоуля–Ленца для участка с сопротивлением R под напряжением U: $P = U^2/R$. При неизменном R:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(0{,}9U)^2/R}{U^2/R} = 0{,}9^2 = 0{,}81.$$

Напряжение упало на 10%, а мощность — на 19%: мощность квадратична по напряжению.



Мощность нагревателя $P = U^2/R$ по вычисленным точкам: снижение напряжения на 10% уменьшает мощность до $0{,}81P_1$.

Пункт 2.

2. Тепловой баланс в первом случае. Потерь нет — теплота, выделенная нагревателем за время τ_1, идёт на нагрев воды до кипения:

$$P_1\tau_1 = cm(T_к - T_0).$$

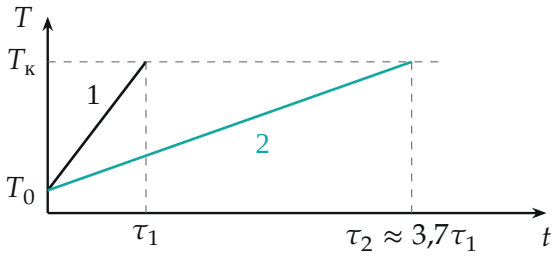
3. Тепловой баланс во втором случае. Воды втрое больше, нагревать её нужно от той же температуры до той же:

$$P_2\tau_2 = c \cdot 3m(T_к - T_0).$$

4. Время. Разделим второе уравнение на первое — теплоёмкость, мас-

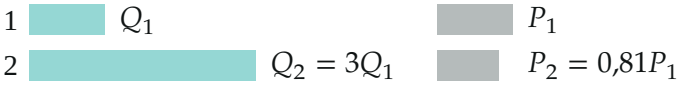
са и температуры сокращаются:

$$\frac{P_2\tau_2}{P_1\tau_1} = 3 \;\Rightarrow\; \tau_2 = \frac{3}{P_2/P_1}\,\tau_1 = \frac{3}{0{,}81}\,\tau_1 = \frac{100}{27}\,\tau_1 \approx 3{,}7\,\tau_1.$$



Температура воды от времени (по вычисленным точкам): без потерь нагрев равномерный; во втором случае наклон меньше в $3/0{,}81 \approx 3{,}7$ раза — воды втрое больше, мощность меньше.

Второй способ (по множителям). Нужная теплота выросла в 3 раза, мощность уменьшилась в $1/0{,}81$ раза; время равно теплоте, делённой на мощность, поэтому оно выросло в $3 \cdot \dfrac{1}{0{,}81} = \dfrac{100}{27}$ раза.



Сравнение двух случаев в масштабе: нужная теплота (слева) и мощность (справа); время $\tau = Q/P$.

Обратите внимание. Время не просто утраивается: при меньшем напряжении мощность падает пропорционально квадрату напряжения, а не напряжению. Взяв 0,9 вместо 0,81, получим неверное $\tau_2 \approx 3{,}3\tau_1$.

Ответ (матрёшкой).

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = 0{,}81,$$

$$\tau_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 \tau_1 = \frac{3}{0{,}81}\,\tau_1 = \frac{100}{27}\,\tau_1 \approx 3{,}7\,\tau_1.$$

Проверка. Размерность: τ_2 — произведение безразмерного числа на τ_1, время. Предел: при прежнем напряжении ($U_2 = U_1$) формула даёт $\tau_2 = 3\tau_1$ — втрое больше воды греется втрое дольше; при прежнем объёме и напряжении — $\tau_2 = \tau_1$.

Смысл: при постоянном сопротивлении время закипания пропорционально массе воды и обратно пропорционально квадрату напряжения.

Ответ. 1) $\dfrac{P_2}{P_1} = 0{,}81$; 2) $\tau_2 = \dfrac{100}{27}\,\tau_1 \approx 3{,}7\,\tau_1$.