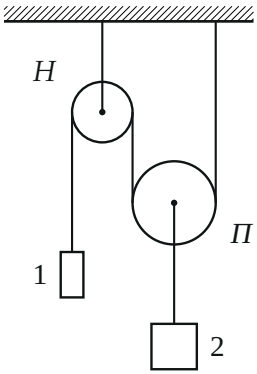
Два груза на подвижном блоке: равновесие и ускорение

Задача 1. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 1] Два подвешенных на нитях груза 1 и 2 различной массы могут двигаться в системе, состоящей из неподвижного блока H и подвижного блока $П$ (см. рис.).



1. Найдите отношение масс грузов 1 и 2, если подвешенные грузы остаются неподвижными.
2. Найдите отношение масс грузов 1 и 2, если груз 1 движется с ускорением $a_1 = g/5$, направленным вверх.

Массами нитей, блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на статику и динамику связанных тел с подвижным блоком. Нить одна, лёгкая и нерастяжимая, блоки невесомые и без трения — натяжение T всей нити одинаково. Груз 1 висит на одном конце нити, а подвижный блок с грузом 2 держат два её куска: вверх на него действует $2T$. В пункте 1 ускорений нет — равновесие; в пункте 2 нужна ещё кинематическая связь: груз 2 движется вдвое медленнее груза 1.

Обозначения. m_1, m_2 — массы грузов; T — натяжение нити; $a_1 = g/5$ — ускорение груза 1 (вверх); a_2 — ускорение груза 2; y_1 — расстояние от оси блока H до груза 1, $y_П$ — от потолка до оси блока $П$.

Пункт 1.

1. Равновесие груза 1. На груз 1 действуют сила тяжести $m_1 g$ вниз и натяжение T вверх. Условие равновесия (второй закон Ньютона с нулевым ускорением) в проекции на вертикаль:

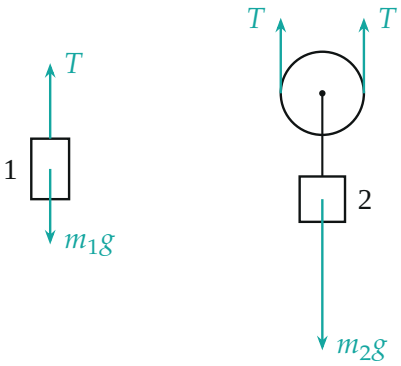
$$T = m_1 g.$$

2. Равновесие блока $П$ с грузом 2. Блок невесомый, рассмотрим систему «блок + груз 2»: вверх — два куска нити по T, вниз — $m_2 g$:

$$2T = m_2 g.$$

3. Отношение масс. Подставим $T = m_1 g$: $2m_1 g = m_2 g$,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$



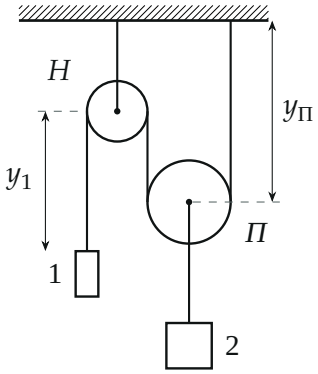
Пункт 1, равновесие: силы на груз 1 и на систему «блок П + груз 2»; длины стрелок — в масштабе ($T = m_1 g$, $m_2 g = 2T$).

Пункт 2.

4. Связь ускорений. Длина нити складывается из куска y_1, двух вертикальных кусков у блока $П$ (каждый меняется как $y_П$) и постоянных дуг:

$$L = y_1 + 2y_П + \text{const} = \text{const} \;\Rightarrow\; \Delta y_1 = -2\Delta y_П.$$

Груз 1 поднялся на x — блок $П$ с грузом 2 опустился на $x/2$. Так же связаны ускорения: $a_2 = a_1/2 = g/10$, направлено вниз.



Координаты для кинематической связи: нить $L = y_1 + 2y_П + const.$

5. Второй закон Ньютона для груза 1 в проекции на ось вверх (туда ускорение a_1):

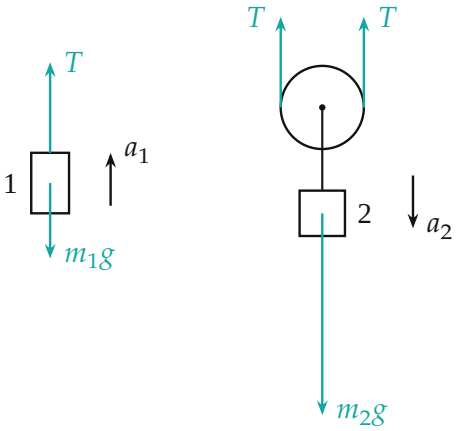
$$T - m_1 g = m_1 a_1 \;\Rightarrow\; T = m_1(g + a_1) = \frac{6}{5} m_1 g.$$

6. Второй закон Ньютона для системы «блок + груз 2» в проекции на ось вниз (туда ускорение a_2):

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2 = \frac{1}{10} m_2 g.$$

7. Отношение масс. Подставим T:

$$\frac{9}{10} m_2 g = \frac{12}{5} m_1 g \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

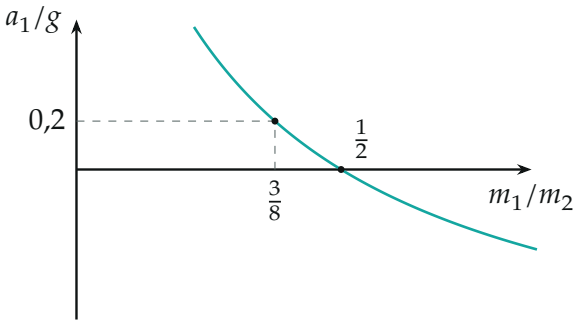


Пункт 2: груз 1 разгоняется вверх, груз 2 — вниз вдвое слабее; натяжение больше $m_1 g$, а $2T$ меньше $m_2 g$ (стрелки в масштабе).

Второй способ (общая формула). Из уравнений шагов 5–6 в общем виде:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g - a_1/2}{2(g + a_1)} = \frac{0{,}9}{2{,}4} = \frac{3}{8}.$$

При $a_1 = 0$ она даёт $1/2$ — ответ пункта 1.



Ускорение груза 1 (вверх — плюс) в зависимости от отношения масс, $a_1/g = (m_2 - 2m_1)/(2m_1 + m_2/2)$, по вычисленным точкам: $1/2$ — равновесие, $3/8$ — наш случай.

Обратите внимание. Ускорения грузов разные: $a_2 = a_1/2$, и направлены они противоположно. Общее для обоих грузов ускорение a дало бы неверный ответ.

Ответ (матрёшкой).

$$\frac{m_1}{m_2}\Big|_{a=0} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{g - a_1/2}{2(g + a_1)} = \frac{3}{8}.$$

Проверка. Отношения безразмерны. Груз 1 разгоняется вверх — груз 2 «перетягивает», значит, m_1/m_2 меньше равновесного $1/2$: $3/8 < 1/2$ — верно. Подстановка: $T = 1{,}2m_1g$, $2T = 2{,}4m_1g = 0{,}9m_2g$ при $m_2 = \frac{8}{3}m_1$ — уравнение шага 6 выполнено.

Смысл: подвижный блок даёт выигрыш в силе вдвое — поэтому в равновесии груз 1 вдвое легче груза 2 — и проигрыш вдвое в пути и ускорении.

Ответ. 1) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{3}{8}$.