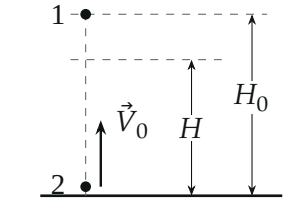
Два мячика сталкиваются в воздухе

Задача 2. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 2] Девочка бросает мячик вертикально вверх. Когда мячик достигает максимальной высоты своего полёта, девочка бросает вверх второй мячик, с той же скоростью и с того же места, что и первый. В результате мячики сталкиваются на высоте $H = 1{,}8$ м от места броска. Какой максимальной высоты H_0, считая от места броска, достигал в своём полёте первый мячик? Сопротивление воздуха не учитывать.



Поясняющий рисунок: первый мячик в верхней точке, в этот момент бросают второй с той же скоростью V_0; встреча на высоте H.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного вертикально вверх, с ускорением $\vec{g}$. Удобно отсчитывать время от второго броска: в этот момент первый мячик неподвижен на высоте H_0 и начинает падать, второй вылетает снизу со скоростью V_0. Оба движутся с одинаковым ускорением $\vec{g}$, поэтому «лишнее» падение $gt^2/2$ у них одинаковое — встреча наступает, когда второй пролетит расстояние H_0 со своей начальной скоростью V_0. Дальше — связь V_0 с H_0 и падение первого мячика за это время.

Обозначения. V_0 — начальная скорость обоих мячиков; t — время от второго броска до встречи; ось y — вертикально вверх от места броска; $g = 10$ м/с^2.

1. Высота подъёма. Для равнозамедленного подъёма до остановки $0 - V_0^2 = -2gH_0$:

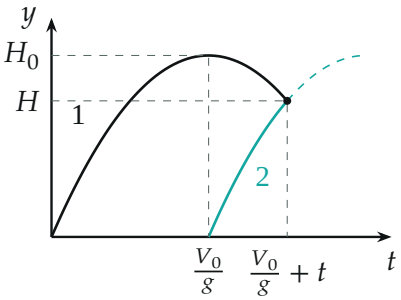
$$V_0 = \sqrt{2gH_0}.$$

2. Законы движения после второго броска. Первый мячик стартует из покоя с высоты H_0, второй — с земли со скоростью V_0 вверх:

$$y_1 = H_0 - \frac{gt^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

3. Момент встречи. Условие $y_1 = y_2$: члены $gt^2/2$ сокращаются,

$$H_0 = V_0 t \;\Rightarrow\; t = \frac{H_0}{V_0}.$$



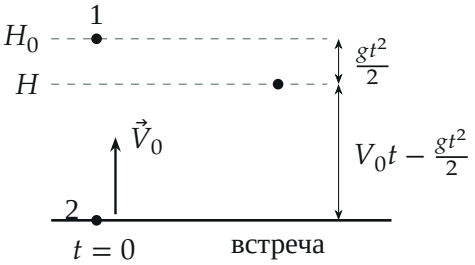
Высоты мячиков от времени по вычисленным точкам ($H_0 = 2{,}4$ м): чёрная — первый мячик, бирюзовая — второй (пунктир — его движение, если бы встречи не было). Встреча — на высоте $H = 1{,}8$ м.

4. Где встреча. За время t первый мячик опустился на

$$H_0 - H = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\cdot\frac{H_0^2}{V_0^2} = \frac{g}{2}\cdot\frac{H_0^2}{2gH_0} = \frac{H_0}{4}.$$

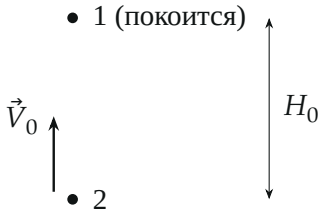
Встреча — на высоте $H = \frac{3}{4}H_0$, отсюда

$$H_0 = \frac{4}{3}H = \frac{4}{3}\cdot 1{,}8 = 2{,}4 \text{ м}.$$



Пути мячиков от второго броска до встречи: первый упал на $gt^2/2$, второй поднялся на $V_0t - gt^2/2$; вместе — H_0.

Второй способ (в системе отсчёта первого мячика). Оба мячика движутся с одним и тем же ускорением $\vec{g}$, поэтому относительно первого второй движется равномерно со скоростью V_0 и проходит расстояние H_0 за время $t = H_0/V_0$ — то же, что в шаге 3. Первый мячик за это время падает из покоя на $\frac{g}{2} \cdot \frac{H_0}{2g} = \frac{H_0}{4}$.



В системе отсчёта первого мячика ускорений нет: второй летит к нему равномерно со скоростью V_0 и проходит H_0 за время H_0/V_0.

Обратите внимание. Встреча не на половине высоты: за время t первый мячик падает медленно (стартует из покоя), а второй летит быстро, поэтому встреча выше середины, на $\frac{3}{4}H_0$.

Ответ (матрёшкой).

$$H_0 = H + \frac{g}{2}\left(\frac{H_0}{\sqrt{2gH_0}}\right)^2 = H + \frac{H_0}{4} \;\Rightarrow\; H_0 = \frac{4}{3}H = 2{,}4 \text{ м}.$$

Проверка. Размерность: H_0/V_0 — время, gt^2 — длина. Числа: $V_0 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2{,}4} \approx 6{,}93$ м/с, $t = 2{,}4/6{,}93 \approx 0{,}35$ с; $y_1 = 2{,}4 - 5 \cdot 0{,}35^2 \approx 1{,}8$ м

и $y_2 = 6{,}93 \cdot 0{,}35 - 5 \cdot 0{,}35^2 \approx 1{,}8$ м — совпадают с H. Ответ от g не зависит, как и должно быть для пропорции высот.

Смысл: при одинаковом ускорении мячики сближаются равномерно, и вся задача сводится к пропорции высот $3 : 4$.

Ответ. $H_0 = \dfrac{4}{3}H = 2{,}4$ м.