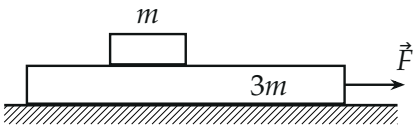
Брусок на доске, сила на доске

Задача 3. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 3] На гладкой горизонтальной поверхности расположена доска массой $3m$, на которой лежит брусок массой m. Коэффициент трения между бруском и доской μ.



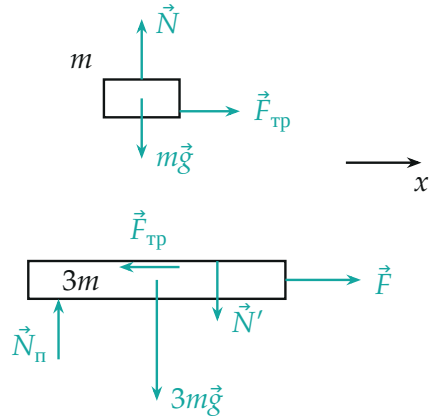
1. Какую минимальную горизонтальную силу $F_{\text{мин}}$ надо приложить к доске, чтобы относительно неё начал двигаться брусок?
2. За какое время брусок переместится относительно доски на расстояние L, если к доске приложить силу $F > F_{\text{мин}}$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику системы «брусок на доске» с трением между ними. Силу прикладывают к доске, а брусок разгоняет только сила трения со стороны доски, и она не может превысить μmg. Значит, ускорение бруска не больше μg. Пока сила F мала, брусок и доска едут вместе; когда для совместного движения бруску потребуется трение больше μmg, доска начнёт выезжать из-под бруска. Дальше — второй закон Ньютона для каждого тела и движение бруска относительно доски.

Обозначения. a_1 — ускорение доски, a_2 — ускорение бруска (относительно земли); $F_{\text{тр}}$ — сила трения между бруском и доской; N — сила реакции доски на брусок; ось x — горизонтально по силе $\vec{F}$.

Пункт 1.

1. Силы. На брусок: сила трения со стороны доски $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вперёд, по $\vec{F}$: доска «тащит» брусок за собой), $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. На доску: $\vec{F}$, по третьему закону Ньютона — трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ назад и давление бруска N вниз, сила тяжести $3m\vec{g}$ и реакция пола. Трения о пол нет.



Силы на брусок (вверху) и на доску (внизу), каждое тело отдельно: трение действует на брусок вперёд, на доску — назад; $N' = N = mg$ — давление бруска на доску, N_n — реакция пола.

2. Граница совместного движения. Пока брусок не скользит, тела движутся с общим ускорением a. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$\text{доска: } F - F_{\text{тр}} = 3ma, \qquad \text{брусок: } F_{\text{тр}} = ma.$$

Отсюда $a = \dfrac{F}{4m}$ и нужное бруску трение $F_{\text{тр}} = \dfrac{1}{4}F$. Трение покоя не больше $\mu N = \mu mg$; скольжение начнётся, когда $\frac{1}{4}F$ достигнет μmg:

$$F_{\text{мин}} = 4\mu mg.$$

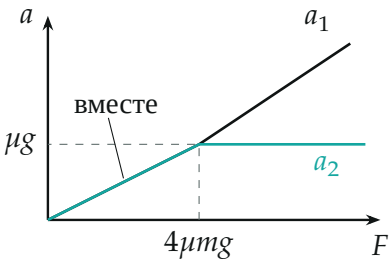
При этом ускорение бруска уже максимально: $a = \mu g$.

Пункт 2.

3. Ускорения при скольжении. При $F > F_{\text{мин}}$ брусок скользит, сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$\text{доска: } F - \mu mg = 3ma_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{F}{3m} - \frac{\mu g}{3};$$

$$\text{брусок: } \mu mg = ma_2 \;\Rightarrow\; a_2 = \mu g.$$



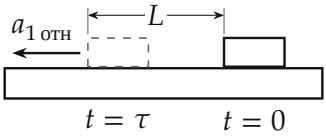
Ускорения доски a_1 и бруска a_2 в зависимости от силы (по вычисленным точкам): до $F_{мин}$ общая прямая $F/(4m)$, после — ускорение бруска застывает на μg, доска разгоняется сильнее.

4. Движение относительно доски. Перейдём в систему отсчёта бруска. Доска в ней стартует из покоя (в момент приложения силы тела покоились) с ускорением

$$a_{1\,\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{F}{3m} - \frac{4}{3}\mu g = \frac{F - 4\mu mg}{3m} > 0,$$

и брусок относительно доски смещается назад на столько же, на сколько доска — вперёд относительно бруска. Путь при равноускоренном движении из покоя $L = \dfrac{a_{1\,\text{отн}}\tau^2}{2}$:

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{a_{1\,\text{отн}}}} = \sqrt{\frac{6mL}{F - 4\mu mg}}.$$



Относительно доски брусок из покоя смещается назад на L с ускорением $a_{1\,отн} = a_1 - a_2$.

Второй способ (в системе отсчёта земли). Перемещения за время τ: доски $x_1 = a_1\tau^2/2$, бруска $x_2 = a_2\tau^2/2$. Брусок сместился относительно доски на $x_1 - x_2 = (a_1 - a_2)\tau^2/2 = L$ — то же уравнение.

Обратите внимание. В пункте 1 нельзя приравнять $F_{\text{мин}}$ к μmg: брусок едет вместе с доской, и почти вся сила F уходит на разгон тяжёлой доски. Ускорение бруска ограничено сверху: при любой силе оно не больше μg.

Ответ (матрёшкой).

$$F_{\text{мин}} = \frac{m+3m}{m}\,\mu mg = 4\mu mg,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{\dfrac{F}{3m} - \dfrac{\mu g}{3} - \mu g}} = \sqrt{\frac{6mL}{F-4\mu mg}}.$$

Проверка. Размерность: $[mL/F] = \text{кг}\cdot\text{м}/(\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2) = \text{с}^2$, под корнем — секунды в квадрате. Пределы: $F \to F_{\text{мин}}$ даёт $\tau \to \infty$ — доска почти не выезжает из-под бруска; $\mu \to 0$ даёт $\tau = \sqrt{6mL/F} = \sqrt{2L/a_1}$ — доска разгоняется сама, брусок стоит. При $F = F_{\text{мин}}$ формулы пунктов 1 и 2 сшиваются: $a_1 = a_2 = \mu g$ (рис. с графиком).

Смысл: брусок «отстаёт» потому, что разогнать его может только ограниченное трение.

Ответ. 1) $F_{\text{мин}} = 4\mu mg$; 2) $\tau = \sqrt{\dfrac{6mL}{F-4\mu mg}}$.