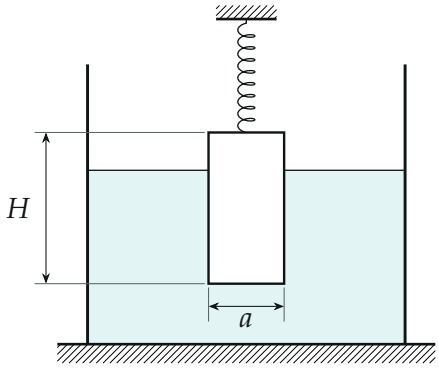
Брусок на пружине опущен в воду

Задача 4. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 4] Брусок, представляющий собой прямоугольный параллелепипед высотой H с квадратным поперечным сечением (сторона квадрата равна a), висит на пружине и опущен в цилиндрический сосуд с водой (см. рис.). Стенки сосуда вертикальны. Первоначально брусок погружен в воду на $3/4$ своего объёма, а пружина не деформирована. Воду доливают в сосуд так, что уровень воды совпадает с верхней гранью бруска. Жесткость пружины k, плотность воды ρ.



1. Найдите массу бруска.
2. Найдите изменение высоты уровня воды в сосуде после долива воды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тела в жидкости (закон Архимеда) с пружиной. Вначале пружина не деформирована, поэтому брусок держит одна сила Архимеда — отсюда его масса. После долива брусок погружён целиком, сила Архимеда больше веса и выталкивает его вверх; пружина, на которой он висит, сжимается и давит на брусок вниз. Брусок поднимается на сжатие пружины Δl, и вода поднимается до его новой верхней грани.

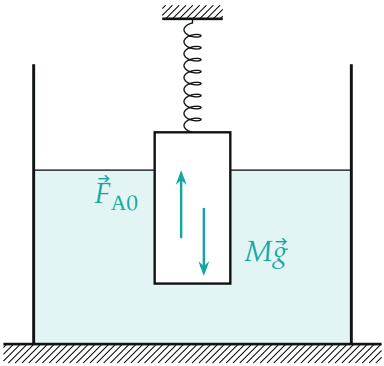
Обозначения. M — масса бруска; $S = a^2$ — площадь его сечения; F_{A0}, F_A — силы Архимеда до и после долива; Δl — сжатие пружины в конце; h — изменение уровня воды. Ось y — вертикально вверх.

Пункт 1.

1. Равновесие вначале. На брусок действуют сила тяжести $M\vec{g}$ вниз и сила Архимеда вверх; пружина не деформирована — её силы нет. Под водой $3/4$ объёма, $V_{\text{погр}} = \frac{3}{4}a^2H$, по закону Архимеда $F_{\text{A0}} = \rho g \cdot \frac{3}{4}a^2H$. Условие равновесия в проекции на ось y:

$$\rho g \frac{3}{4} a^2 H - Mg = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{3}{4}\rho a^2 H.$$

Плотность бруска — $3/4$ плотности воды.



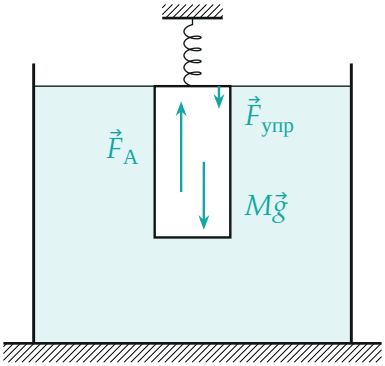
Вначале: пружина не деформирована, вес бруска уравновешен силой Архимеда для погружённых $3/4$ объёма.

Пункт 2.

2. Равновесие в конце. Брусок погружён целиком: $F_{\text{A}} = \rho g a^2 H = \frac{4}{3}Mg$. Лишняя сила Архимеда поднимает брусок, пружина сжимается на Δl и давит на него вниз с силой $k\Delta l$ (закон Гука). Условие равновесия в проекции на ось y:

$$\rho g a^2 H - Mg - k\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; k\Delta l = \rho g a^2 H - \frac{3}{4}\rho g a^2 H = \frac{1}{4}\rho g a^2 H,$$

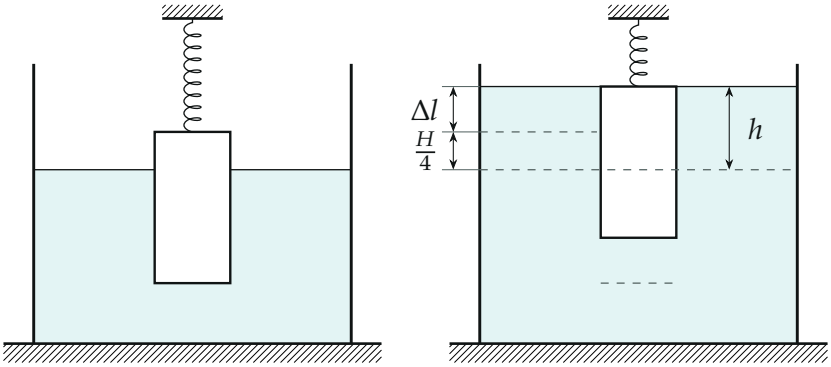
$$\Delta l = \frac{\rho g a^2 H}{4k}.$$



После долива: $F_A = \frac{4}{3}Mg$ *вверх; вниз — вес и сила сжатой пружины* $F_{упр} = k\Delta l = \frac{1}{3}Mg$ *(стрелки в масштабе).*

3. Изменение уровня. Вначале над водой была верхняя четверть бруска, $H/4$. Брусок поднялся на Δl, значит, его верхняя грань теперь на $\frac{H}{4} + \Delta l$ выше прежнего уровня. Новый уровень совпадает с ней:

$$h = \frac{H}{4} + \Delta l = \frac{H}{4}\left(1 + \frac{a^2\rho g}{k}\right).$$



До и после долива. Пунктир — прежний уровень воды, прежнее положение верхней и нижней граней бруска; уровень поднялся на $h = \frac{H}{4} + \Delta l$.

Второй способ (через силу пружины). Сила пружины в конце равна приросту силы Архимеда: добавочно погрузилась верхняя четверть бруска, $k\Delta l = \rho g a^2 \cdot \frac{H}{4}$ — то же уравнение шага 2 без M.

Обратите внимание. Ответ $h = H/4$ неверен: брусок не стоит на месте, а всплывает, пока его не остановит сжатая пружина. Площадь сосуда в ответ не входит — от неё зависит лишь, сколько воды надо долить.

Ответ (матрёшкой).

$$M = \rho \cdot \frac{3}{4} a^2 H, \qquad h = \frac{H}{4} + \frac{\rho g a^2 \cdot \frac{H}{4}}{k} = \frac{H}{4}\left(1 + \frac{a^2 \rho g}{k}\right).$$

Проверка. Размерность: $a^2\rho g$ — это $\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{м}^3 \cdot \text{м}/\text{с}^2 = \text{Н}/\text{м}$, как у k, так что $a^2\rho g/k$ безразмерна, h в метрах. Пределы: очень жёсткая пружина $k \to \infty$ — брусок не сдвинется, $h \to H/4$; мягкая пружина — брусок уходит вверх далеко, h растёт.

Смысл: пружина сжимается на столько, чтобы её сила скомпенсировала добавку силы Архимеда от верхней четверти бруска.

Ответ. 1) $M = \frac{3}{4}\rho a^2 H$; 2) $h = \frac{H}{4}\left(1 + \frac{a^2\rho g}{k}\right)$.