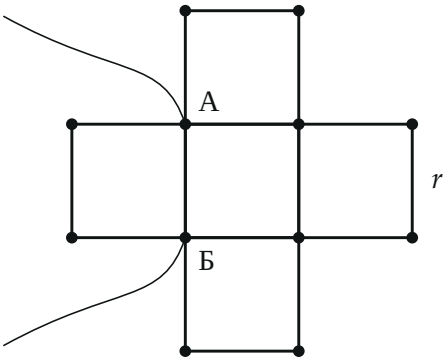
Проволочный каркас из 16 отрезков

Задача 5. [Физтех 2017/18, 9 класс, задача 5] Проводящий проволочный каркас (см. рис.) составлен из 16 одинаковых отрезков жёсткого провода. К клеммам А и Б подано напряжение $U = 9$ В. При этом через подводящие провода течёт ток $I = \frac{1}{2}$ А.

1. Найдите сопротивление R между клеммами А и Б.
2. Найдите сопротивление r одного отрезка провода.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сопротивление симметричной цепи. Ток и напряжение известны — сопротивление каркаса даёт закон Ома для всего каркаса. Чтобы связать его с сопротивлением одного отрезка, каркас упрощаем: каждый боковой квадрат присоединён к центральному только двумя соседними узлами, поэтому его можно заменить одним эквивалентным резистором.

Обозначения. r — сопротивление одного отрезка; r' — эквивалентное сопротивление стороны центрального квадрата вместе с прилегающим боковым квадратом; R — сопротивление каркаса между А и Б.

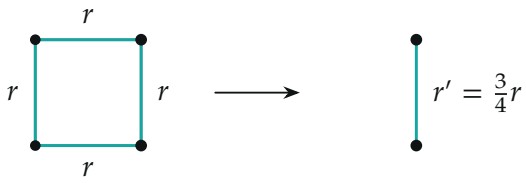
Пункт 1.

1. Закон Ома для всего каркаса. Каркас между клеммами — один резистор R, через который течёт ток I под напряжением U:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{9\text{ В}}{0{,}5\text{ А}} = 18\text{ Ом}.$$

Пункт 2.

2. Устройство каркаса. Каркас — «крест» из пяти квадратов: центрального и четыре боковых. Каждый боковой квадрат имеет с центральным общую сторону и больше ни с чем не соединён. Значит, между концами общей стороны включены параллельно два пути: сама сторона (r) и три остальные стороны бокового квадрата, соединённые последовательно ($3r$).



Боковой квадрат вместе с общей стороной: сторона r и путь из трёх сторон $3r$ включены параллельно между двумя узлами — их заменяет один резистор r'.

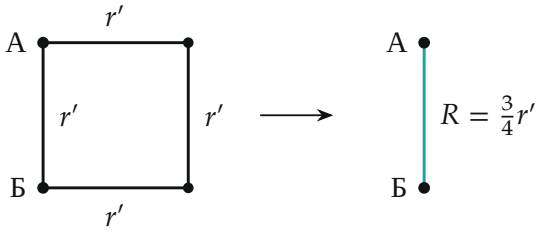
3. Замена бокового квадрата. Сопротивление двух параллельных путей r и $3r$:

$$r' = \frac{r \cdot 3r}{r + 3r} = \frac{3}{4}\, r.$$

Так поступаем со всеми четырьмя боковыми квадратами. Каркас превращается в один квадрат, у которого каждая сторона — r'.

4. Центральный квадрат. Клеммы А и Б — соседние вершины центрального квадрата. Между ними опять два параллельных пути: сторона АБ (r') и три другие стороны ($3r'$). Значит,

$$R = \frac{r' \cdot 3r'}{r' + 3r'} = \frac{3}{4}\, r' = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\, r = \frac{9}{16}\, r.$$



После замены всех боковых квадратов остаётся один квадрат из сторон r'. Между соседними вершинами А и Б — сторона r' параллельно с путём $3r'$.

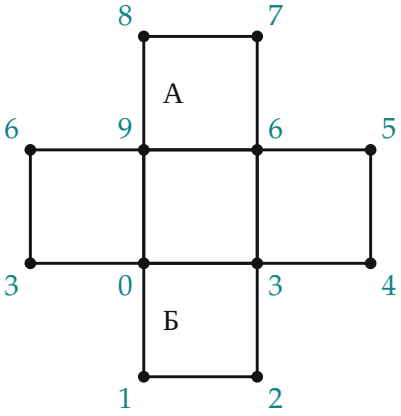
5. Сопротивление отрезка. Из шага 4 и пункта 1:

$$r = \frac{16}{9} R = \frac{16}{9} \cdot \frac{U}{I} = \frac{16}{9} \cdot 18 \text{ Ом} = 32 \text{ Ом}.$$

6. Второй способ: потенциалы узлов. Проверим ответ правилами Кирхгофа, решив их для всех 12 узлов каркаса (python). Примем потенциал Б равным нулю, А — 9 В. Потенциалы узлов получились целыми вольтами (рисунок ниже). К узлу А примыкают четыре отрезка: к Б, вверх, вправо и влево; напряжения на них $9-0=9$, $9-8=1$, $9-6=3$ и $9-6=3$ В. Закон Ома для каждого отрезка и закон сохранения заряда для узла А (весь ток I подводящего провода расходится по этим отрезкам):

$$I = \frac{(9+1+3+3)\text{ В}}{r} = \frac{16\text{ В}}{r} \;\Rightarrow\; r = \frac{16\text{ В}}{0{,}5\text{ А}} = 32\text{ Ом},$$

то же значение.



Потенциалы узлов в вольтах (Б — ноль, А — 9 В). Ток по отрезку пропорционален разности потенциалов его концов; из узла А по четырём отрезкам уходит ток $(9+1+3+3)\ В/r$.

Обратите внимание: боковой квадрат нельзя считать «тупиком без тока». Он подключён двумя узлами с разными потенциалами, поэтому по нему идёт ток и он уменьшает сопротивление общей стороны с r до $\frac{3}{4}r$.

Проверка. Размерность: $R = U/I$ — омы. Предел: если убрать все боковые квадраты, $R = \frac{3}{4}r = 24$ Ом при $r = 32$ Ом — больше 18 Ом, как и должно быть: лишние параллельные пути только уменьшают сопротивление. Два способа дали одно и то же $r = 32$ Ом. Смысл: из-за обходных путей каркас из 16 отрезков по 32 Ом между соседними узлами имеет всего 18 Ом.

Ответ. 1) $R = \dfrac{U}{I} = 18$ Ом; 2) $r = \dfrac{16}{9}R = 32$ Ом.