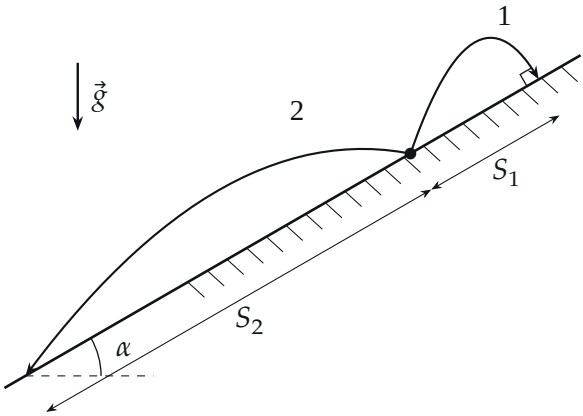
Выстрелы из пушки на склоне горы

Задача 1. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 1] Пушка установлена на плоском склоне горы, образующем угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. При выстреле «вверх» по склону снаряд падает на склон на расстоянии $S_1 = 700$ м от места выстрела. В момент падения скорость снаряда перпендикулярна поверхности склона. Пушку разворачивают на 180° и производят второй выстрел «вниз» по склону. Затем пушку перемещают на горизонтальную поверхность и производят третий выстрел. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Угол наклона ствола к поверхности, с которой стреляют, при всех выстрелах одинаков.

1. На каком расстоянии S_2 от места второго выстрела снаряд упадёт на склон?
2. Найдите дальность L стрельбы при третьем выстреле.

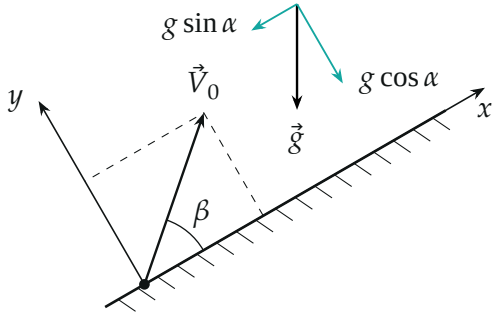


Поясняющий рисунок в масштабе: траектория 1 — выстрел вверх по склону (снаряд падает перпендикулярно склону), траектория 2 — выстрел вниз по склону.

▲ **Решение. Что происходит.** Снаряд летит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Склон — наклонная прямая, поэтому удобно взять оси вдоль склона и по нормали к нему: «упал на склон» тогда значит просто «координата

по нормали снова равна нулю», а «скорость перпендикулярна склону» — «проекция скорости на склон равна нулю». В этих осях ускорение раскладывается на две постоянные составляющие, и каждое направление — равноускоренное движение. По нормали движение при выстрелах вверх и вниз одинаково, значит, одинаково и время полёта; разница только в том, тормозит или разгоняет снаряд составляющая $g\sin\alpha$ вдоль склона.

Обозначения. V_0 — скорость вылета снаряда, β — угол ствола к поверхности, с которой стреляют (одинаков во всех выстрелах), t — время полёта над склоном. Ось x — вдоль склона в сторону выстрела, ось y — по нормали к склону вверх.



Выстрел вверх по склону: оси вдоль склона и по нормали. Ускорение $\vec{g}$ (чёрная стрелка) раскладывается на $g\sin\alpha$ против оси x и $g\cos\alpha$ против оси y (бирюзовые). Пунктир — проекции $V_0\cos\beta$ и $V_0\sin\beta$.

Пункт 1.

1. Движение по нормали к склону: время полёта. Проекция ускорения на ось y равна $-g\cos\alpha$ и при выстреле вверх, и при выстреле вниз (склон тот же, нормаль та же). Начальная проекция скорости $V_0\sin\beta$ тоже одинакова. Закон равноускоренного движения по оси y:

$$y(t) = V_0\sin\beta\cdot t - \frac{g\cos\alpha\, t^2}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

Время полёта при выстрелах вверх и вниз по склону одно и то же.

2. Условие «скорость перпендикулярна склону». При выстреле вверх проекция ускорения на ось x равна $-g\sin\alpha$: снаряд вдоль склона

тормозится. В момент падения проекция скорости на склон равна нулю:

$$v_x = V_0 \cos\beta - g \sin\alpha \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 \cos\beta = g \sin\alpha \cdot t.$$

Это и есть главное условие задачи: снаряд падает ровно тогда, когда вдоль склона он «затормозил до нуля». Подставим время из шага 1 — найдём угол ствола ($\beta \approx 41^\circ$):

$$V_0 \cos\beta = g \sin\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\beta}{g \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

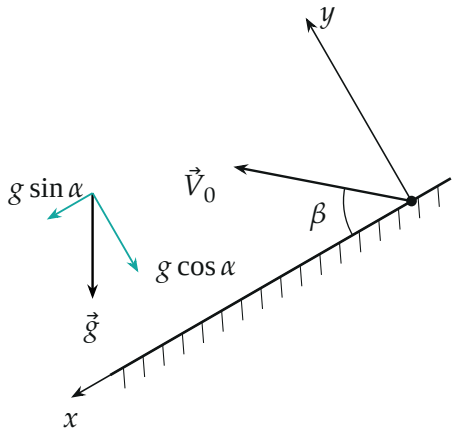
3. Путь вдоль склона при выстреле вверх. Движение по оси x равнозамедленное, и $V_0 \cos\beta = g \sin\alpha\, t$:

$$S_1 = V_0 \cos\beta \cdot t - \frac{g \sin\alpha\, t^2}{2} = g \sin\alpha\, t^2 - \frac{g \sin\alpha\, t^2}{2} = \frac{g \sin\alpha\, t^2}{2}.$$

4. Путь вдоль склона при выстрелах вниз. Направим ось x вниз по склону, в сторону выстрела. Теперь составляющая $g \sin\alpha$ направлена по оси x и разгоняет снаряд; начальная проекция скорости та же $V_0 \cos\beta$, время полёта то же t:

$$S_2 = V_0 \cos\beta \cdot t + \frac{g \sin\alpha\, t^2}{2} = g \sin\alpha\, t^2 + \frac{g \sin\alpha\, t^2}{2} = \frac{3g \sin\alpha\, t^2}{2} = 3S_1.$$

$$S_2 = 3S_1 = 2100 \text{ м}.$$



Выстрел вниз по склону: ось x направлена вниз, в сторону выстрела. Составляющая $g\sin\alpha$ теперь разгоняет снаряд вдоль склона, по нормали всё как при выстреле вверх.

Второй способ для пункта 1. Сравним проекции скорости на склон в момент падения. При выстреле вверх она равна 0, при выстреле вниз $V_0\cos\beta + g\sin\alpha\, t = 2V_0\cos\beta$. Вдоль склона движение равноускоренное, поэтому путь равен средней скорости, умноженной на время:

$$S_1 = \frac{V_0\cos\beta + 0}{2}t, \qquad S_2 = \frac{V_0\cos\beta + 2V_0\cos\beta}{2}t, \qquad \frac{S_2}{S_1} = 3.$$

Пункт 2.

5. Выстрел с горизонтальной поверхности. Ствол наклонён к горизонту под тем же углом β, это обычная дальность полёта тела, брошенного под углом к горизонту:

$$L = \frac{V_0^2\sin 2\beta}{g} = \frac{2V_0^2\cos^2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}{g}.$$

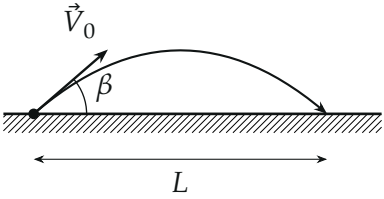
Неизвестную $V_0\cos\beta$ выразим через S_1. Для этого подставим время из шага 2 в формулу шага 3:

$$S_1 = \frac{(V_0\cos\beta)^2}{2g\sin\alpha}, \qquad V_0^2\cos^2\beta = 2gS_1\sin\alpha.$$

Тогда

$$L = \frac{2 \cdot 2gS_1 \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{g} = 4S_1 \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

$$L = 4S_1 \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} = 2S_1 \cos\alpha = \sqrt{3}\,S_1 \approx 1212 \text{ м}.$$



Третий выстрел с горизонтальной поверхности, траектория в масштабе первого рисунка: $L \approx 1{,}73\,S_1$.

Обратите внимание. Угол β отсчитывается от поверхности, с которой стреляют, а не от горизонта. При выстреле вверх по склону ствол составляет с горизонтом угол $\alpha + \beta \approx 71^\circ$, при выстреле вниз — всего $\beta - \alpha \approx 11^\circ$, на горизонтальной площадке — $\beta \approx 41^\circ$.

Проверка. Размерности: все ответы выражены через S_1 — метры. Проверка в лабораторных осях: при найденном $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}/2$ и $V_0 \approx 111$ м/с снаряд, выпущенный вниз под углом 11° к горизонту, через $t \approx 16{,}7$ с оказывается в точке $(-1819;\ -1050)$ м — на склоне на расстоянии $\sqrt{1819^2 + 1050^2} \approx 2100$ м (python). Скорость в момент падения при выстреле вверх: $(36{,}2;\ -62{,}7)$ м/с, её наклон -60° — перпендикулярно склону. Смысл: вдоль склона снаряд при выстреле вниз всё время разгоняется, а вверх — тормозится до нуля, поэтому за то же время пролетает втрое больше.

Ответ. 1) $S_2 = 3S_1 = 2100$ м; 2) $L = 2S_1 \cos\alpha = \sqrt{3}\,S_1 \approx 1212$ м.