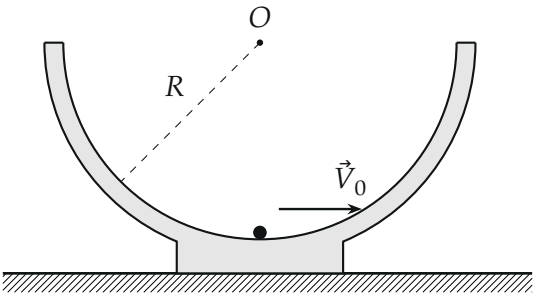
Шайба в гладкой чаше на шероховатом столе

Задача 2. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 2] На шероховатой горизонтальной поверхности стола покоится чаша. Внутренняя поверхность чаши — гладкая полусфера радиуса R. На дне чаши лежит небольшая шайба массы m. Масса чаши $3m$. Ударом шайбе сообщают горизонтальную скорость $V_0 = \sqrt{2gR}$, здесь g — ускорение свободного падения. Скольжение чаши начинается в тот момент времени, когда вектор скорости шайбы повернётся на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

1. С какой силой P шайба действует на чашу в этот момент?
2. Вычислите коэффициент μ трения скольжения чаши по столу.



Поясняющий рисунок: чаша в разрезе, O — центр полусферы. Шайбе на дне сообщают скорость $\vec{V}_0$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока чаша покоится, шайба скользит по неподвижной гладкой полусфере, как по дуге окружности: скорость падает по закону сохранения энергии, а сила давления на чашу находится из второго закона Ньютона в проекции на радиус (движение по окружности). Шайба давит на чашу вниз и вбок; боковую составляющую держит сила трения покоя между чашей и столом. Эта составляющая растёт, и в момент, когда требуемая сила трения достигает предела $\mu N_{\text{ст}}$, чаша трогается. Класс задачи — «до какого момента тело покоится»: условие равновесия плюс предельная сила трения.

Обозначения. O — центр полусферы, α — угол между радиусом, проведённым к шайбе, и вертикалью. Скорость шайбы касается окружности, поэтому она повернулась ровно на угол, на который повернулся

радиус: это тот же угол $\alpha = 30°$. V — скорость шайбы в этот момент, $\vec{N}$ — сила, с которой чаша действует на шайбу, $\vec{P}$ — сила, с которой шайба действует на чашу, $\vec{N}_{\text{ст}}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ — нормальная реакция и сила трения стола, действующие на чашу.

Пункт 1.

1. Закон сохранения энергии для шайбы от дна до положения α. Чаша покоится, внутренняя поверхность гладкая, сила $\vec{N}$ перпендикулярна скорости и работы не совершает — механическая энергия шайбы сохраняется. Шайба поднялась на $h = R - R\cos\alpha$:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

$$V^2 = 2gR - 2gR(1-\cos\alpha) = 2gR\cos\alpha.$$

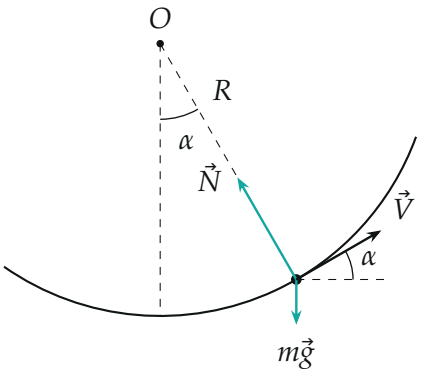


Схема «шайба» в момент, когда скорость повернулась на угол α: сила тяжести, сила реакции чаши $\vec{N}$ (к центру O) и скорость $\vec{V}$ по касательной. Длины сил — по расчёту: $N \approx 2{,}6\,mg$.

2. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на радиус (на ось от шайбы к центру O). Шайба движется по окружности радиуса R со скоростью V, поэтому проекция её ускорения на эту ось равна V^2/R. Зачем такая ось: неизвестная касательная составляющая ускорения в неё не входит, а сила $\vec{N}$ входит целиком. Проекция силы тяжести на ось к

центру равна $-mg\cos\alpha$:

$$N - mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha + 2mg\cos\alpha = 3mg\cos\alpha.$$

3. Третий закон Ньютона. Шайба действует на чашу с силой $\vec{P} = -\vec{N}$, направленной по радиусу от центра O (наружу и вниз):

$$P = N = 3mg\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg \approx 2{,}6\,mg.$$

Пункт 2.

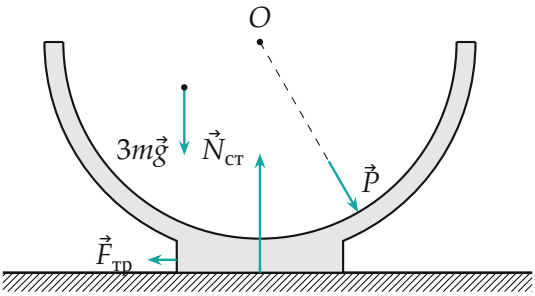
4. Условие равновесия чаши. До начала скольжения чаша покоится, сумма сил на неё равна нулю:

$$3m\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

Проекции на горизонталь (в сторону шайбы) и на вертикаль вверх:

$$P\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \qquad N_{\text{ст}} - 3mg - P\cos\alpha = 0.$$

Шайба прижимает чашу к столу: сила реакции стола больше веса чаши.



Силы, действующие на чашу. Сила $\vec{P}$ приложена в точке, где шайба, и направлена от центра O; трение стола препятствует сдвигу вправо. Длины — по расчёту в единицах mg: 3; 2,6; $N_{ст} = 5{,}25$; $F_{тр} = 1{,}3$.

5. Начало скольжения. Чаша трогается, когда нужная сила трения

покоя достигает своего максимума $\mu N_{ст}$:

$$P\sin\alpha = \mu\,(3mg + P\cos\alpha) \quad\Rightarrow\quad \mu = \frac{P\sin\alpha}{3mg + P\cos\alpha}.$$

Подставим $P = 3mg\cos\alpha$:

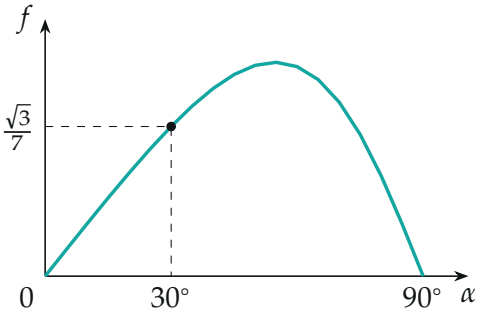
$$\mu = \frac{3mg\cos\alpha\sin\alpha}{3mg + 3mg\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha},$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0{,}25.$$

6. Почему трогается именно при $\alpha = 30°$. Та же формула при любом угле α даёт отношение $F_{тр}/N_{ст}$, которое нужно, чтобы чаша стояла:

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}.$$

С дна (где $f = 0$) это отношение растёт, и чаша поедет, как только оно впервые дорастёт до μ. График показывает, что до $\alpha \approx 55°$ функция растёт, так что значение при 30° — это действительно первое достижение предела, и $\mu = f(30°)$.



Отношение $f = F_{тр}/N_{ст}$, нужное для покоя чаши, в зависимости от угла α (по вычисленным точкам). Чаша трогается в первой точке, где $f = \mu$.

Обратите внимание. Пока чаша не поехала, она неподвижна, и шайба движется по неподвижной окружности — поэтому законом сохранения энергии одной шайбы и центростремительным ускорением V^2/R можно пользоваться. После начала скольжения чаши это уже не так. Сила $\vec{P}$ направлена по радиусу (поверхность гладкая), поэтому она не только толкает чашу вбок, но и прижимает её к столу — это слагаемое $P\cos\alpha$ в $N_{\text{ст}}$ легко потерять.

Проверка. Размерности: $P \sim mg$ — ньютоны, μ безразмерен. Предел: на дне ($\alpha = 0$) $P = 3mg = mg + mV_0^2/R$ — вес шайбы плюс центростремительная сила, бокового толчка нет, $f = 0$. При $\alpha \to 90^\circ$ шайба доходит до края с нулевой скоростью ($V^2 = 2gR\cos\alpha \to 0$), и $P \to 0$. Смысл: сильнее всего шайба давит на дно, а вбок — на промежуточных углах; чаша сдвигается там, где боковой толчок становится достаточным по сравнению с прижатием.

Ответ. 1) $P = 3mg\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg \approx 2{,}6\,mg$; 2) $\mu = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{7} \approx 0{,}25$.