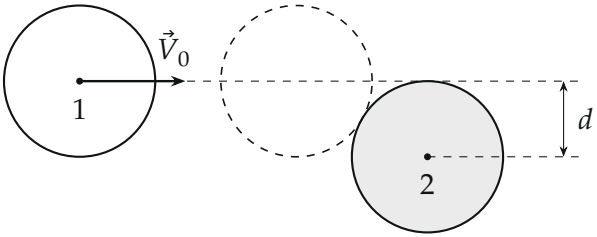
Упругое столкновение гладких дисков

Задача 3. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 3] Гладкая упругая шайба радиуса R, движущаяся со скоростью V_0, упруго сталкивается с такой же шайбой, покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности. В результате столкновения скорость налетающей шайбы уменьшается вдвое.

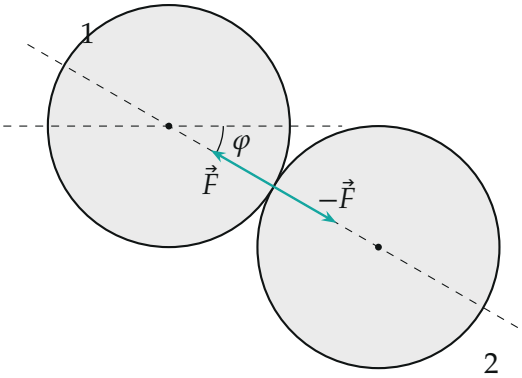
1. Найдите расстояние d от центра покоившейся шайбы до прямой, по которой двигался центр налетающей шайбы.
2. Через какое время T после соударения расстояние между центрами шайб будет равно S?



Поясняющий рисунок, вид сверху: шайба 1 налетает на покоящуюся шайбу 2; пунктирный круг — шайба 1 в момент удара. d — прицельное расстояние.

▲ **Решение. Что происходит.** Это нецентральный упругий удар одинаковых шайб. Шайбы гладкие, поэтому за время удара они толкают друг друга только по линии центров: покоившаяся шайба полетит вдоль линии центров, а у налетающей сохранится составляющая скорости, перпендикулярная этой линии. Для одинаковых масс законы сохранения импульса и энергии вместе дают известный результат: после удара скорости шайб перпендикулярны. Через условие «скорость уменьшилась вдвое» находим угол удара, а по нему — прицельное расстояние d. Во втором пункте шайбы летят по взаимно перпендикулярным прямым — расстояние между центрами считаем по теореме Пифагора.

Обозначения. m — масса каждой шайбы, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости налетающей и покоившейся шайб после удара, $v_1 = V_0/2$. φ — угол между скоростью $\vec{V}_0$ и линией центров в момент удара. В момент удара расстояние между центрами равно $2R$.



Момент удара. Шайбы гладкие, поэтому силы взаимодействия $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ направлены по линии центров (наклонный пунктир), угол φ — между ней и прямой движения шайбы 1.

Пункт 1.

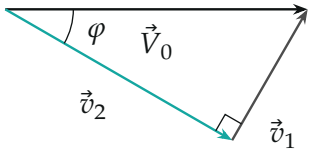
1. Направления скоростей после удара. Силы удара направлены по линии центров. На покоившуюся шайбу 2 действует только сила $-\vec{F}$ вдоль этой линии, поэтому её скорость $\vec{v}_2$ направлена по линии центров. На шайбу 1 вдоль перпендикуляра к линии центров сил нет, поэтому составляющая её скорости поперёк линии центров сохраняется:

$$v_{1\perp} = V_0 \sin\varphi.$$

2. Законы сохранения импульса и энергии системы двух шайб от «до удара» до «после удара». Горизонтальных внешних сил нет, удар упругий. Массы равны, m сокращается:

$$\vec{V}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \qquad V_0^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возведём первое равенство в квадрат: $V_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Сравнение со вторым даёт $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$: скорости после удара перпендикулярны (или одна из них равна нулю — это центральный удар, здесь не наш случай). Значит, $\vec{v}_1$ перпендикулярна линии центров, то есть вдоль неё у шайбы 1 скорости не осталось, и $v_1 = v_{1\perp} = V_0 \sin\varphi$.



Треугольник скоростей: $\vec{V}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, и по закону сохранения энергии угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ прямой. Бирюзой — скорость шайбы 2 вдоль линии центров.

3. Угол удара и прицельное расстояние. По условию $v_1 = V_0/2$:

$$V_0 \sin\varphi = \frac{V_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

Центр шайбы 1 в момент удара лежит на расстоянии $2R$ от центра шайбы 2 на линии центров, а прямая движения центра 1 идёт под углом φ к ней. Расстояние от центра 2 до этой прямой — катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $2R$ против угла φ:

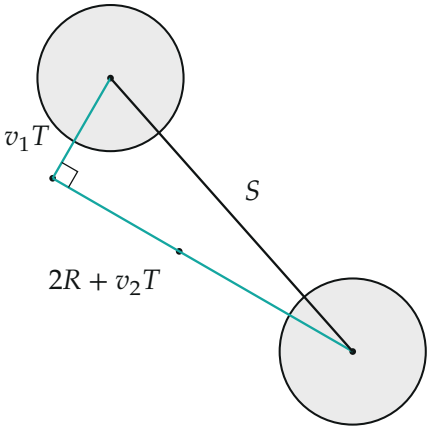
$$d = 2R\sin\varphi = R.$$

Скорость шайбы 2 и проверка энергии:

$$v_2 = V_0\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0, \qquad v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{4}V_0^2 + \frac{3}{4}V_0^2 = V_0^2.$$

Пункт 2.

4. Положения шайб через время t после удара. После удара шайбы движутся равномерно. Шайба 2 уходит по линии центров от шайбы 1 со скоростью v_2, шайба 1 — перпендикулярно линии центров со скоростью v_1. Через время t центр шайбы 2 удалился от исходного положения центра 1 вдоль линии центров на $2R + v_2t$, а центр шайбы 1 сместился поперёк на v_1t. Это катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза — расстояние между центрами.



Через время T (построено для $S = 5R$): точки — центры шайб в момент удара, серые круги — шайбы в момент T. Катеты — путь вдоль линии центров и поперёк неё (бирюза), гипотенуза — расстояние S между центрами.

5. Уравнение для T. По теореме Пифагора

$$(2R + v_2T)^2 + (v_1T)^2 = S^2.$$

Подставим $v_1 = \frac{1}{2}V_0$, $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0$ и раскроем скобки ($v_1^2 + v_2^2 = V_0^2$):

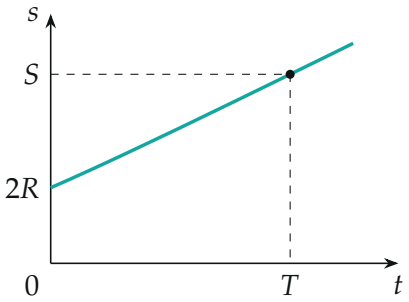
$$V_0^2T^2 + 2\sqrt{3}\,RV_0T + 4R^2 - S^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно V_0T; нужен положительный корень (второй корень отрицателен):

$$V_0T = -\sqrt{3}R + \sqrt{3R^2 - 4R^2 + S^2} = \sqrt{S^2 - R^2} - \sqrt{3}R,$$

$$T = \frac{\sqrt{S^2 - R^2} - \sqrt{3}\,R}{V_0}.$$

Ответ имеет смысл при $S \geq 2R$: меньше чем на $2R$ центры сблизиться не могут.



Расстояние s между центрами после удара (по вычисленным точкам): от $2R$ в момент удара растёт и выходит на прямую с наклоном V_0. Точка — пример $S = 5R$, $T \approx 3{,}17\,R/V_0$.

Обратите внимание. Перпендикулярность скоростей после удара — следствие равенства масс и упругости удара; при разных массах или потере энергии это уже не так. И время считается от конца удара, когда центры ещё на расстоянии $2R$, а не от «нуля».

Проверка. Размерности: d — метры, $\sqrt{S^2 - R^2}/V_0$ — секунды. Предел: при $S = 2R$ получаем $T = (\sqrt{3}R - \sqrt{3}R)/V_0 = 0$ — момент удара. При $S \gg R$ $T \approx S/V_0$: шайбы разлетаются под прямым углом со скоростями $\frac{1}{2}V_0$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}V_0$, и расстояние растёт со скоростью $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = V_0$. Численно для $S = 5R$ координаты центров через $T = 3{,}167\,R/V_0$ дают расстояние ровно $5{,}000\,R$ (python).

Ответ. 1) $d = 2R\sin\varphi = R$; 2) $T = \dfrac{\sqrt{S^2 - R^2} - \sqrt{3}\,R}{V_0}$.