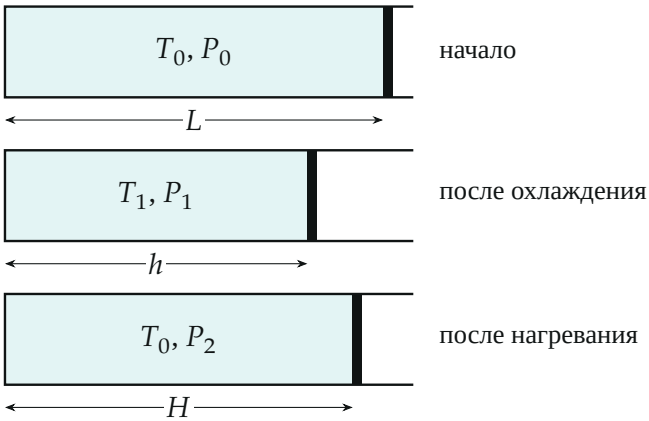
Охлаждение и нагревание воздуха под поршнем с трением

Задача 4. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 4] Горизонтальный цилиндр длины $L = 0{,}5$ м вначале открыт в атмосферу и заполнен воздухом при температуре $T_0 = 300$ К. Цилиндр плотно закрывают тонким поршнем и охлаждают. Поршень смещается и останавливается на расстоянии $h = 0{,}4$ м от дна. Далее цилиндр нагревают до температуры T_0, при которой поршень останавливается на расстоянии $H = 0{,}46$ м от дна. Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа, площадь поперечного сечения цилиндра $S = 0{,}1$ м^2. Внутренняя энергия воздуха $U = \frac{5}{2}PV$, где P — давление, V — объём. Считать силу трения, действующую на поршень, постоянной в процессе движения поршня.

1. До какой температуры T_1 был охлаждён воздух в цилиндре?
2. Найдите силу трения $F_{\text{тр}}$, действующую на поршень в процессе движения поршня.
3. Какое количество Q теплоты подвели к воздуху в цилиндре в процессе нагревания к тому моменту, когда поршень начал смещаться?



Поясняющий рисунок: три равновесных положения поршня (длины в масштабе). Справа от поршня — атмосфера.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на поршень с сухим трением. Пока разность сил давления меньше предельной силы трения, поршень стоит, и газ меняет состояние при постоянном объёме. Поршень движется (медленно) только тогда, когда разность сил давления равна силе трения: при охлаждении газ «втягивает» поршень, и давление внутри на $F_{\text{тр}}/S$ меньше атмосферного, при нагревании газ выталкивает поршень, и давление на $F_{\text{тр}}/S$ больше атмосферного. Количество газа всё время одно и то же — связываем состояния уравнением Клапейрона. Минимум букв: оба давления движения симметричны относительно P_0.

Обозначения. P_1 — давление газа, пока поршень едет внутрь при охлаждении (и в конце охлаждения), P_2 — пока поршень едет наружу при нагревании (и в конце). Объёмы: LS, hS, HS. Ось x — вдоль цилиндра наружу, от дна к открытому концу.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для поршня при движении внутрь. Поршень движется медленно, с нулевым ускорением. Атмосфера давит на него снаружи силой P_0S (к дну), газ изнутри — силой P_1S (наружу), сила трения направлена против движения — наружу. В проекции на ось x:

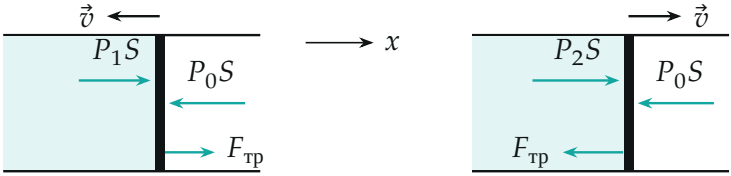
$$P_1S + F_{\text{тр}} - P_0S = 0.$$

2. Второй закон Ньютона для поршня при движении наружу. Теперь трение направлено к дну:

$$P_2S - P_0S - F_{\text{тр}} = 0.$$

Сложим уравнения — сила трения уйдёт:

$$P_1 + P_2 = 2P_0.$$



охлаждение: поршень едет внутрь нагревание: поршень едет наружу

Силы, действующие на поршень при медленном движении. Сила трения всегда против скорости, поэтому давление газа при движении внутрь меньше P_0, а наружу — больше.

3. Уравнение Клапейрона для начального и конечного состояний. В начале газ при T_0, P_0, объёме LS; в конце снова при T_0, давлении P_2 и объёме HS (поршень остановился, а последний участок он ехал наружу при давлении P_2). Температуры равны:

$$P_0\,LS = P_2\,HS \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_0\,\frac{L}{H}, \qquad P_1 = 2P_0 - P_2 = P_0\Big(2 - \frac{L}{H}\Big).$$

4. Уравнение Клапейрона для начального состояния и конца охлаждения. В конце охлаждения давление P_1, объём hS, температура T_1:

$$\frac{P_0LS}{T_0} = \frac{P_1hS}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_0\,\frac{P_1h}{P_0L} = T_0\Big(2 - \frac{L}{H}\Big)\frac{h}{L} = T_0\Big(\frac{2h}{L} - \frac{h}{H}\Big).$$

$$T_1 = 300\Big(1{,}6 - \frac{0{,}4}{0{,}46}\Big) = 300 \cdot \frac{16{,}8}{23} \approx 219\ \text{К}.$$

Пункт 2.

5. Сила трения — из уравнения шага 2:

$$F_{тр} = (P_2 - P_0)S = P_0S\,\frac{L-H}{H} = 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}46} = \frac{20}{23} \cdot 10^3\ \text{Н} \approx 870\ \text{Н}.$$

Пункт 3.

6. Нагревание до начала движения поршня. Пока поршень стоит, объём постоянен (hS), работа газа равна нулю, и по первому закону термодинамики теплота идёт только на изменение внутренней энергии.

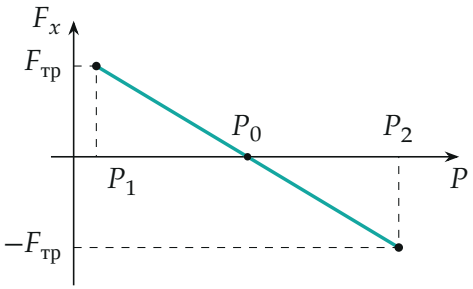
Давление растёт от P_1 до P_2 (поршень трогается, когда разность сил давления сравнялась с силой трения):

$$Q = \Delta U = \frac{5}{2}(P_2 - P_1)\,hS.$$

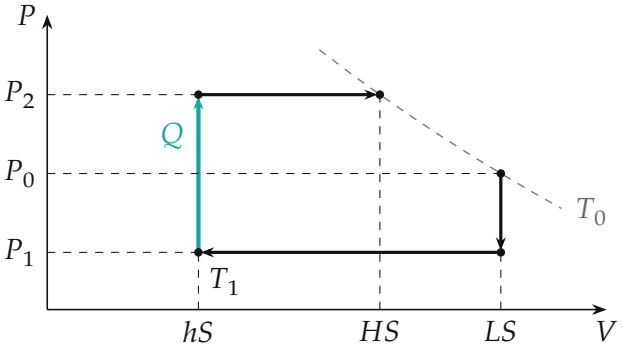
Вычтем уравнение шага 1 из уравнения шага 2: $(P_2 - P_1)S = 2F_{\text{тр}}$. Тогда

$$Q = \frac{5}{2} \cdot \frac{2F_{\text{тр}}}{S} \cdot hS = 5F_{\text{тр}}h = 5 \cdot \frac{20000}{23} \cdot 0{,}4 = \frac{40}{23} \cdot 10^3 \text{ Дж} \approx 1{,}7 \text{ кДж}.$$

Почему поршень стоит весь этот участок: сила трения покоя подстраивается. Из условия равновесия поршня её проекция на ось x равна $F_x = (P_0 - P)S$. В начале нагревания ($P = P_1$) она равна $+F_{\text{тр}}$ (направлена наружу, как в конце охлаждения), при $P = P_0$ обращается в нуль, при $P = P_2$ равна $-F_{\text{тр}}$ — достигает предела, и поршень трогается.



Проекция силы трения покоя на ось x при нагревании, пока поршень стоит: линейно падает с ростом давления газа и в точке P_2 достигает предела $-F_{тр}$.



Процесс на диаграмме P–V (в масштабе, по вычисленным давлениям). Охлаждение: поршень стоит, давление падает до P_1, затем поршень едет внутрь при P_1 до объёма hS. Нагревание: поршень стоит, давление растёт до P_2 (бирюза — здесь подводится Q), затем поршень едет наружу при P_2. Начало и конец лежат на изотерме T_0 (пунктир).

Обратите внимание. Поршень останавливается или трогается не при давлении P_0, а при $P_0 \mp F_{\text{тр}}/S$. Поэтому в конце давление газа $P_2 \neq P_0$, хотя температура вернулась к T_0, и объём не вернулся к LS. Внутренняя энергия $U = \frac{5}{2}PV$ меняется на изохоре только за счёт давления — отсюда простой ответ $Q = 5F_{\text{тр}}h$.

Проверка. Размерности: P_0S — ньютоны, $F_{\text{тр}}h$ — джоули. Предел: без трения $H = L$, тогда $P_1 = P_2 = P_0$, $T_1 = T_0h/L$ — обычный изобарный процесс, и $Q = 0$ (поршень трогается сразу). Второй способ для T_1: $P_1 = P_0(2 - L/H) \approx 0{,}913\,P_0$, $T_1 = T_0 \cdot 0{,}913 \cdot 0{,}8 \approx 219$ K — то же. Знаки: $P_1 < P_0 < P_2$, давление при движении внутрь меньше атмосферного, наружу — больше, как и должно быть при трении.

Ответ. 1) $T_1 = T_0\left(\frac{2h}{L} - \frac{h}{H}\right) \approx 219$ K; 2) $F_{\text{тр}} = P_0S\,\frac{L-H}{H} \approx 870$ Н; 3) $Q = 5F_{\text{тр}}h = \frac{40}{23}$ кДж $\approx 1{,}7$ кДж.