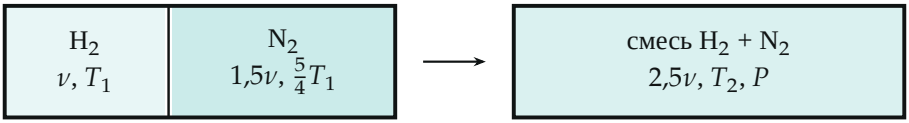
Смешивание газов в теплоизолированном сосуде

Задача 5. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 5] Теплоизолированный цилиндр объёмом V разделён на две части перегородкой. В одной части находится водород в количестве ν при температуре T_1, а в другой — азот в количестве $1{,}5\nu$ при температуре $\frac{5}{4}T_1$ и другом давлении. Перегородка прорывается.

1. Какая температура T_2 установится в смеси?
2. Найти давление P в смеси.



Поясняющий рисунок: толстые стенки — теплоизоляция; перегородка рвётся, газы перемешиваются и занимают весь объём V.

▲ **Решение. Что происходит.** После прорыва перегородки газы перемешиваются и через некоторое время приходят к общей температуре. Цилиндр теплоизолирован и жёсткий: теплота не подводится, работа над газом не совершается. Значит, по первому закону термодинамики внутренняя энергия всего газа сохраняется — это задача на закон сохранения энергии при смешивании («тепловой баланс» для газов). Давление смеси потом находим из уравнения Клапейрона — Менделеева или по закону Дальтона.

Обозначения. R — универсальная газовая постоянная. Водород и азот — двухатомные газы, у каждого внутренняя энергия $U = \frac{5}{2}\nu RT$ (молярная теплоёмкость при постоянном объёме $\frac{5}{2}R$).

Пункт 1.

1. Первый закон термодинамики для всего газа от состояния «до прорыва» до состояния равновесия смеси: $Q = \Delta U + A$. Теплоизоляция даёт $Q = 0$, жёсткие стенки — $A = 0$ (газ в целом не меняет объём

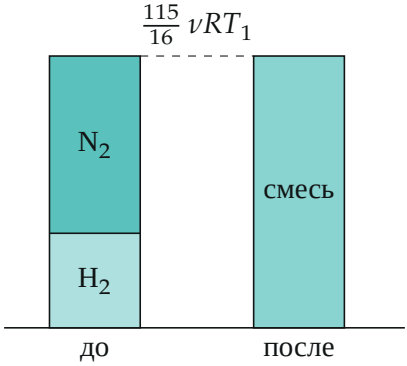
V; работа частей газа друг над другом — внутреннее дело системы). Значит,

$$\Delta U = 0, \qquad U_{\text{до}} = U_{\text{после}}.$$

2. Внутренняя энергия до и после. Внутренняя энергия смеси идеальных газов — сумма энергий компонентов:

$$U_{\text{до}} = \frac{5}{2}\nu RT_1 + \frac{5}{2}\cdot 1{,}5\nu \cdot R \cdot \frac{5}{4}T_1 = \frac{5}{2}\nu RT_1\left(1+\frac{15}{8}\right) = \frac{115}{16}\nu RT_1,$$

$$U_{\text{после}} = \frac{5}{2}\nu RT_2 + \frac{5}{2}\cdot 1{,}5\nu \cdot RT_2 = \frac{5}{2}\cdot 2{,}5\nu \cdot RT_2 = \frac{25}{4}\nu RT_2.$$



Внутренняя энергия газа до и после прорыва (в масштабе): $\frac{5}{2}\nu RT_1$ у водорода и $\frac{75}{16}\nu RT_1$ у азота, в сумме — столько же, сколько у смеси.

3. Температура смеси. Приравниваем:

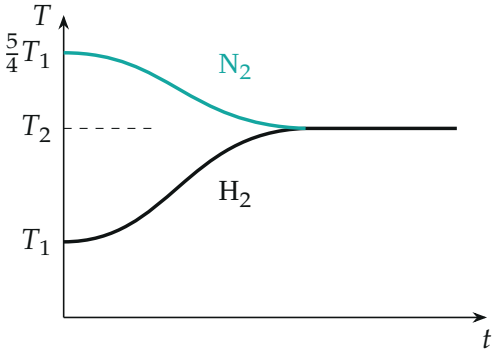
$$\frac{25}{4}\nu RT_2 = \frac{115}{16}\nu RT_1 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{115}{100}T_1 = 1{,}15\,T_1.$$

Водород нагрелся (от T_1 до $1{,}15\,T_1$), азот остыл (от $1{,}25\,T_1$ до $1{,}15\,T_1$).

Второй способ: средневзвешенная температура. Теплоёмкости на моль у газов одинаковы, поэтому T_2 — среднее температур, взвешенное по количествам вещества:

$$T_2 = \frac{\nu\cdot T_1 + 1{,}5\nu\cdot\frac{5}{4}T_1}{\nu + 1{,}5\nu} = \frac{1+1{,}875}{2{,}5}T_1 = 1{,}15\,T_1.$$

Это тот же тепловой баланс: водород получил $\frac{5}{2}\nu R \cdot 0{,}15T_1$, азот отдал $\frac{5}{2} \cdot 1{,}5\nu R \cdot 0{,}1T_1$ — одно и то же.

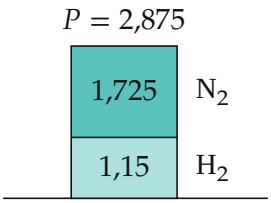


Качественно: температуры водорода и азота после прорыва сходятся к общему значению $T_2 = 1{,}15\,T_1$, лежащему ближе к температуре азота — его больше. Вертикальная ось — в масштабе.

Пункт 2.

4. Давление смеси — закон Дальтона. Каждый газ занимает весь объём V при температуре T_2 и создаёт своё парциальное давление по уравнению Клапейрона — Менделеева; давление смеси — их сумма:

$$p_{H_2} = \frac{\nu R T_2}{V}, \qquad p_{N_2} = \frac{1{,}5\nu R T_2}{V}, \qquad P = p_{H_2} + p_{N_2} = \frac{2{,}5\nu R T_2}{V}.$$



Давление смеси — сумма парциальных давлений (в единицах $\nu RT_1/V$, в масштабе).

С $T_2 = 1{,}15\,T_1$:

$$P = 2{,}5 \cdot 1{,}15\,\frac{\nu R T_1}{V} = 2{,}875\,\frac{\nu R T_1}{V} = \frac{23}{8}\,\frac{\nu R T_1}{V}.$$

Обратите внимание. Начальные давления и объёмы частей не даны и не нужны: внутренняя энергия идеального газа зависит только от количества вещества и температуры, а не от объёма. Важно, что оба газа двухатомные: их молярные теплоёмкости одинаковы ($\frac{5}{2}R$), и поэтому T_2 — простое среднее по молям.

Проверка. Размерности: $\nu RT/V$ — паскали. Предел: если бы температуры были равны ($T_{N_2} = T_1$), формула дала бы $T_2 = T_1$ — смешивание одинаково нагретых газов температуру не меняет. Знак: $T_1 < T_2 < \frac{5}{4}T_1$ — температура смеси между исходными, как и должно быть без подвода теплоты.

Ответ. 1) $T_2 = 1{,}15\,T_1$; 2) $P = \dfrac{2{,}5\nu R T_2}{V} = 2{,}875\,\dfrac{\nu R T_1}{V}$.