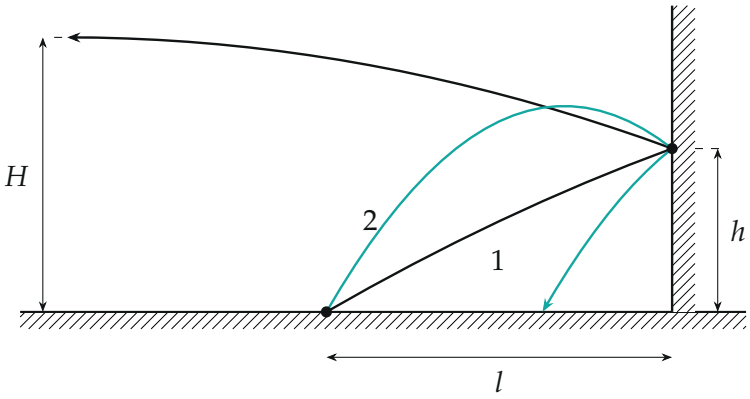
Теннисный мяч и упругая стенка

Задача 1. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 1] Теннисист тренируется на горизонтальной площадке, посылая мяч к вертикальной стенке. В первом случае мяч летит практически с уровня земли с начальной скоростью $V_0 = 22$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту и ударяется в стенку. Во втором случае мяч стартует из той же точки со скоростью $\frac{V_0}{2}$ под углом 2α к горизонту и ударяется в ту же точку стенки. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Мяч движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной стенке. Силой сопротивления воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

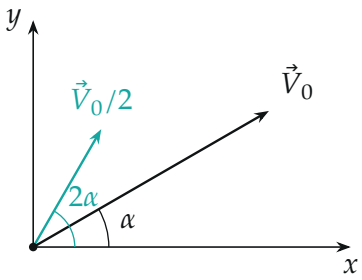
1. На какой максимальной высоте H находился мяч в полёте в первом случае?
2. На какой высоте h мяч ударяется в стенку?
3. Через какое время τ после удара о стенку мяч упадёт на площадку во втором случае?



Поясняющий рисунок в масштабе: траектория 1 — первый бросок, мяч бьёт в стенку на подъёме, а наибольшей высоты H достигает уже после отскока; траектория 2 (бирюза) — второй бросок, после отскока мяч падает на площадку. l — расстояние до стенки.

▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит с постоянным ускорением $\vec{g}$, горизонтальное и вертикальное движения независимы. Абсолютно упругий удар о вертикальную гладкую стенку меняет знак только горизонтальной составляющей скорости, вертикальная не меняется. Поэтому стенка никак не влияет на зависимость высоты мяча от времени: и наибольшая высота, и момент падения такие же, как без стенки. Неизвестное расстояние l до стенки находим из условия, что обе траектории проходят через одну точку стенки.

Обозначения. Начало координат — точка старта, ось x — горизонтально к стенке, ось y — вертикально вверх. l — расстояние до стенки, t_1, t_2 — время полёта до стенки в первом и втором случаях, T_2 — полное время полёта во втором случае.



Начальные скорости в двух бросках (длины стрелок в масштабе): V_0 под углом α и $V_0/2$ под углом 2α.

Пункт 1.

1. Наибольшая высота. По вертикали мяч движется равнозамедленно с ускорением $-g$ и начальной скоростью $V_0 \sin\alpha$; в верхней точке вертикальная скорость равна нулю. Стенка вертикальную скорость не меняет, поэтому

$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{11^2}{20} = 6{,}05 \text{ м}.$$

Наибольшая высота достигается в момент $V_0 \sin\alpha/g = 1{,}1$ с, а до стенки мяч летит меньше (ниже найдём $t_1 = 0{,}4$ с): верхняя точка — уже после отскока, что видно на первом рисунке.

Пункт 2.

2. Уравнение траектории. Для броска со скоростью v под углом θ к горизонту

$$x = v\cos\theta\cdot t, \qquad y = v\sin\theta\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключаем время, подставив $t = x/(v\cos\theta)$:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}.$$

Обе траектории проходят через точку стенки $(l;\,h)$:

$$h = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}, \qquad h = l\,\mathrm{tg}\,2\alpha - \frac{gl^2}{2(V_0/2)^2\cos^2 2\alpha}.$$

3. Расстояние до стенки и высота удара. Вычтем первое уравнение из второго, h уйдёт, сократим на $l \neq 0$:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{gl}{2V_0^2}\Big(\frac{4}{\cos^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\Big).$$

При $\alpha = 30^\circ$

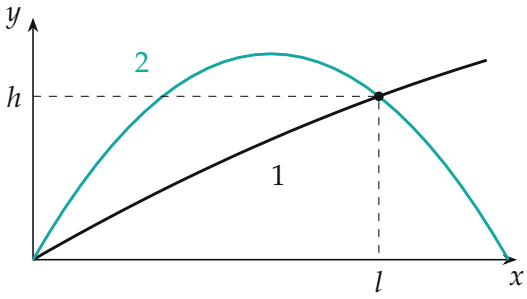
$$\mathrm{tg}\,60^\circ - \mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{4}{\cos^2 60^\circ} - \frac{1}{\cos^2 30^\circ} = 16 - \frac{4}{3} = \frac{44}{3}.$$

Отсюда

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2V_0^2}{g}\cdot\frac{3}{44} = \frac{\sqrt{3}}{11}\,\frac{V_0^2}{g} \approx 7{,}62\text{ м}.$$

Подставим в первое уравнение ($\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$):

$$h = \frac{1}{11}\,\frac{V_0^2}{g} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{121}\,\frac{V_0^2}{g} = \frac{9}{121}\,\frac{V_0^2}{g} = \frac{9\cdot 48{,}4}{121} = 3{,}6\text{ м}.$$



Параболы обоих бросков без учёта стенки (по вычисленным точкам, в одинаковом масштабе по осям): они пересекаются в точке $(l;\, h)$ — туда и поставлена стенка.

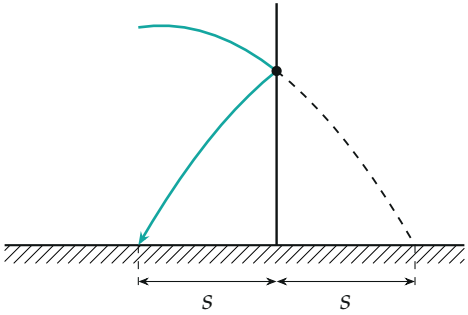
Пункт 3.

4. Время полёта после удара во втором случае. Удар о стенку меняет знак горизонтальной скорости, а вертикальную оставляет прежней. Значит, $y(t)$ после удара та же, что была бы без стенки, и мяч упадёт на площадку в тот же момент T_2, когда упал бы без стенки — траектория после отскока зеркальна «продолжению за стенку». Полное время полёта и время до стенки:

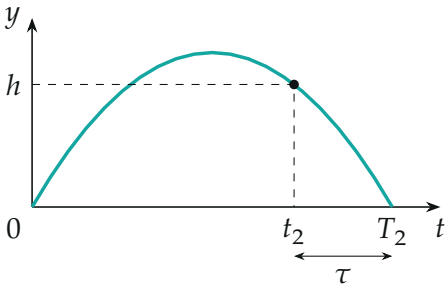
$$T_2 = \frac{2 \cdot \frac{V_0}{2} \sin 2\alpha}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{V_0}{g} \approx 1{,}91 \text{ с},$$

$$t_2 = \frac{l}{\frac{V_0}{2}\cos 2\alpha} = \frac{4l}{V_0} = \frac{4\sqrt{3}}{11}\,\frac{V_0}{g} \approx 1{,}39 \text{ с}.$$

$$\tau = T_2 - t_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{11}\right)\frac{V_0}{g} = \frac{3\sqrt{3}}{22}\,\frac{V_0}{g} \approx 0{,}52 \text{ с}.$$



Второй бросок после удара: бирюза — настоящая траектория, пунктир — где летел бы мяч без стенки. Они зеркально симметричны относительно стенки, поэтому время падения одно и то же; по горизонтали обе сдвигаются от стенки на $s = \frac{V_0}{2}\cos 2\alpha \cdot \tau$.



Высота мяча во втором броске (по вычисленным точкам): обычная парабола, удар в момент t_2 *на неё не влияет. После удара до падения проходит* $\tau = T_2 - t_2$.

Обратите внимание. Высота H в первом случае достигается после отскока: мяч бьёт в стенку ещё на подъёме. Ответ $H = 6{,}05$ м верен, потому что упругий удар о вертикальную стенку не трогает вертикальную скорость.

Проверка. Размерности: V_0^2/g — метры, V_0/g — секунды. Численно (python): $y(t_1) = 11 \cdot 0{,}4 - 5 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}6$ м и $y(t_2) = 3{,}6$ м — одна точка стенки; в момент удара во втором случае $v_y = -4{,}3$ м/с, мяч уже снижается.

Ответ. 1) $H = 6{,}05$ м; 2) $h = \frac{9}{121}\frac{V_0^2}{g} = 3{,}6$ м; 3) $\tau = \frac{3\sqrt{3}}{22}\frac{V_0}{g} \approx 0{,}52$ с.