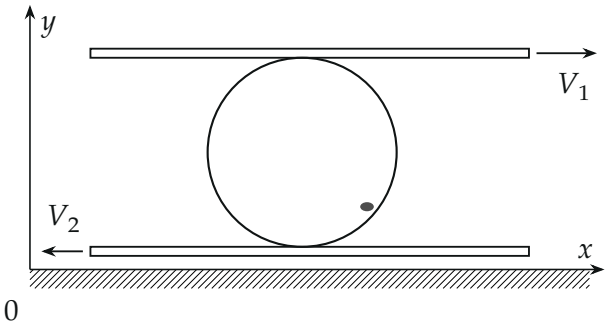
Шар между движущимися пластинами и жук внутри

Задача 2. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 2] Тонкостенный полый шар радиуса $R = 0{,}1$ м зажат между двумя горизонтальными параллельными пластинами, одна из которых движется вправо со скоростью $V_1 = 0{,}6$ м/с, а вторая — влево со скоростью $V_2 = 0{,}4$ м/с. Проскальзывания между пластинами и шаром нет. На внутренней поверхности полого шара сидит жук массы $m = 1$ г. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Найдите скорость V центра шара.
2. Найдите максимальную силу P_{MAX}, с которой жук действует на шар.

▲ **Решение. Что происходит.** Шар катится между пластинами без проскальзывания: его верхняя точка движется вместе с верхней пластиной, нижняя — вместе с нижней. Шар — твёрдое тело, его движение складывается из поступательного движения центра и вращения вокруг центра; по скоростям двух точек находим и скорость центра, и угловую скорость. Скорость центра постоянна, поэтому система отсчёта центра шара инерциальна. В ней шар просто вращается с постоянной угловой скоростью, и жук, сидящий на шаре, равномерно движется по окружности радиуса R. Сила, с которой шар действует на жука, вместе с силой тяжести создаёт центростремительное ускорение — это задача на равномерное движение по окружности.

Обозначения. Ось x — вправо, V — проекция скорости центра шара на ось x, ω — угловая скорость шара, $v' = \omega R$ — скорость точек шара относительно центра. $\vec{F}$ — сила, с которой шар действует на жука; по третьему закону Ньютона жук действует на шар с силой $\vec{P} = -\vec{F}$, $P = F$. φ — угол между радиусом, проведённым к жуку, и вертикалью вниз.

Пункт 1.

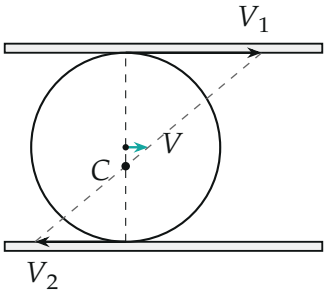
1. Скорости точек шара. Скорость точки шара — скорость центра плюс скорость вращения вокруг центра. У верхней и нижней точек скорости вращения противоположны и равны ωR. Проскальзывания нет, поэтому скорости этих точек совпадают со скоростями пластин:

$$\text{верх: } V + \omega R = V_1, \qquad \text{низ: } V - \omega R = -V_2.$$

Сложим и вычтем уравнения:

$$V = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{0{,}6 - 0{,}4}{2} = 0{,}1 \text{ м/с}, \qquad \omega R = \frac{V_1 + V_2}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Центр шара движется вправо (быстрее движется верхняя пластина), $\omega = 5$ рад/с.



Скорости точек вертикального диаметра (в масштабе) меняются линейно: от V_2 влево внизу до V_1 вправо вверху; у центра — $V = 0{,}1$ м/с вправо (бирюза). C — мгновенный центр вращения, на $0{,}2R$ ниже центра шара.

Второй способ: мгновенный центр вращения. Скорости точек вертикального диаметра линейно зависят от высоты. Нулевая скорость — в точке C, которая делит диаметр в отношении $V_2 : V_1 = 2 : 3$, то есть

на высоте $0{,}8R$ от низа. Центр шара на $0{,}2R$ выше C, а верх — на $1{,}2R$ выше, поэтому $V = V_1 \cdot \dfrac{0{,}2R}{1{,}2R} = \dfrac{0{,}6}{6} = 0{,}1$ м/с — то же.

Пункт 2.

2. Переход в систему отсчёта центра шара. Центр шара движется равномерно и прямолинейно, поэтому эта система отсчёта инерциальна, и второй закон Ньютона в ней записывается без сил инерции. В ней шар вращается вокруг неподвижного центра с постоянной ω, и жук, сидящий на внутренней поверхности, движется равномерно по окружности радиуса R (размером жука пренебрегаем) со скоростью

$$v' = \omega R = \frac{V_1 + V_2}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Его ускорение направлено к центру шара и по модулю равно

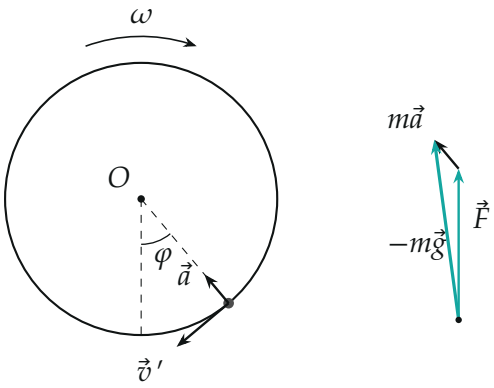
$$a = \frac{v'^2}{R} = \frac{0{,}25}{0{,}1} = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

3. Второй закон Ньютона для жука. На жука действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$ со стороны шара (нормальная реакция плюс сила трения покоя, удерживающая жука на месте):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} - m\vec{g}.$$

Ускорение $\vec{a}$ направлено к центру, $-m\vec{g}$ — вверх. Угол между ними равен φ (угол радиуса жука с вертикалью вниз). По теореме косинусов

$$F^2 = m^2(a^2 + g^2 + 2ag\cos\varphi).$$

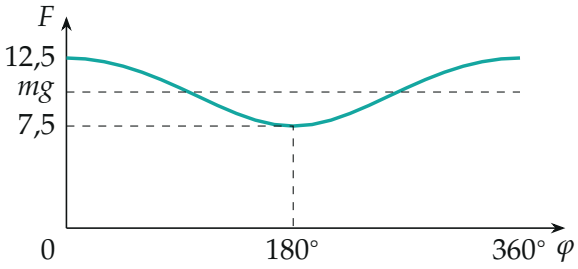


Слева — шар в системе отсчёта центра: жук движется по окружности со скоростью v', его ускорение $\vec{a}$ направлено к центру O. Справа — векторное равенство $\vec{F} = m\vec{a} + (-m\vec{g})$ при том же положении жука (длины в масштабе: $a = g/4$).

4. Наибольшая сила. F растёт с $\cos\varphi$ и наибольшая при $\cos\varphi = 1$, то есть $\varphi = 0$: жук в нижней точке шара. Там ускорение направлено вверх, как и $-m\vec{g}$, и векторы складываются по модулю:

$$P_{MAX} = F_{\max} = m\Big(g + \frac{v'^2}{R}\Big) = m\Big(g + \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R}\Big),$$

$$P_{MAX} = 10^{-3} \cdot (10 + 2{,}5) = 12{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$



Сила, с которой шар действует на жука, в миллиньютонах в зависимости от положения жука (по вычисленным точкам): наибольшая внизу ($\varphi = 0$), наименьшая вверху. Пунктир — вес жука $mg = 10$ мН.

Это та же формула, что для пассажира в нижней точке «мёртвой петли»: опора давит сильнее веса на mv'^2/R.

Обратите внимание. Скорость жука в системе центра — $(V_1 + V_2)/2 = 0{,}5$ м/с, а не скорость центра 0,1 м/с и не скорость пластин. Сила $\vec{F}$ не обязана быть направлена по радиусу: в боковых положениях её касательную составляющую $mg\sin\varphi$ создаёт сила трения покоя.

Проверка. Размерности: $m(g + v'^2/R)$ — ньютоны. Предел: если пластины движутся с одинаковыми скоростями навстречу ($V_1 = V_2$), центр стоит ($V = 0$) — шар вращается на месте, как и должно быть. Если $V_1 + V_2 \to 0$, шар не вращается, и $P_{MAX} = mg$ — жук просто лежит. Наименьшая сила (вверху) $m(g - a) = 7{,}5$ мН положительна: при $a < g$ шар везде действует на жука вверх, и жук может сидеть, не отрываясь.

Ответ. 1) $V = \dfrac{V_1 - V_2}{2} = 0{,}1$ м/с; 2) $P_{MAX} = m\left(g + \dfrac{(V_1 + V_2)^2}{4R}\right) = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н.