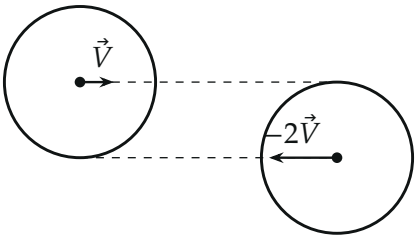
Упругое соударение шайб по касательным линиям

Задача 3. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 3] Две одинаковые гладкие упругие шайбы движутся по гладкой горизонтальной поверхности. Скорость первой шайбы $\vec{V}$, скорость второй $(-2\vec{V})$. Для каждой шайбы прямая, сонаправленная с вектором скорости и проходящая через центр шайбы, касается другой шайбы. Происходит абсолютно упругое соударение.



1. Найдите скорость V_1 (по модулю) первой шайбы после соударения.
2. На какой угол α повернётся вектор скорости первой шайбы в результате соударения?

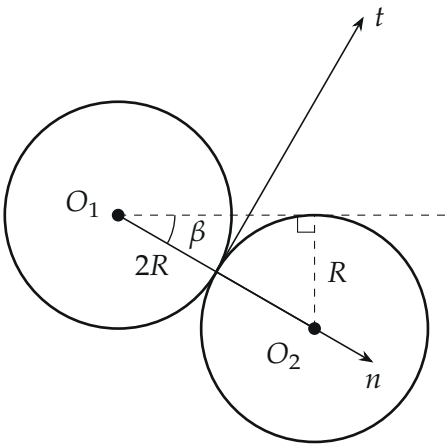
▲ **Решение. Что происходит.** Это упругий нецентральный удар одинаковых гладких шайб. Шайбы гладкие, поэтому сила удара направлена только по линии центров: проекции скоростей на перпендикулярное направление (касательную) не меняются. А вдоль линии центров удар одинаковых шайб — центральный упругий, при нём шайбы обмениваются проекциями скоростей. Поэтому сначала геометрия: найдём, под каким углом к скоростям стоит линия центров в момент удара.

Обозначения. R — радиус шайб, O_1, O_2 — их центры. Ось n — по линии центров от O_1 к O_2 в момент удара, ось t — по общей касательной; β — угол между $\vec{V}$ и осью n. $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости шайб после удара.

1. Геометрия удара. Прямая через O_1 вдоль $\vec{V}$ касается второй шайбы, значит, расстояние от O_2 до этой прямой равно R; прямые движения центров параллельны и отстоят на R. В момент удара шайбы касаются,

$O_1O_2 = 2R$. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой O_1O_2 катет поперёк движения равен R:

$$\sin\beta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 30^\circ.$$



Момент удара: линия центров длиной $2R$, смещение центров поперёк движения R, угол $\beta = 30^\circ$. Ось n — по линии центров, ось t — по касательной в точке касания.

2. Проекции скоростей до удара. Вектор $\vec{V}$ образует с осью n угол β, вектор $-2\vec{V}$ — противоположен ему:

$$u_{1n} = V\cos\beta, \quad u_{1t} = V\sin\beta; \quad u_{2n} = -2V\cos\beta, \quad u_{2t} = -2V\sin\beta.$$

3. Удар по оси t. Шайбы гладкие: сила взаимодействия направлена по нормали к поверхностям, то есть по оси n. По второму закону Ньютона в проекции на ось t импульс каждой шайбы не меняется:

$$v_{1t} = u_{1t} = V\sin\beta = \frac{V}{2}.$$

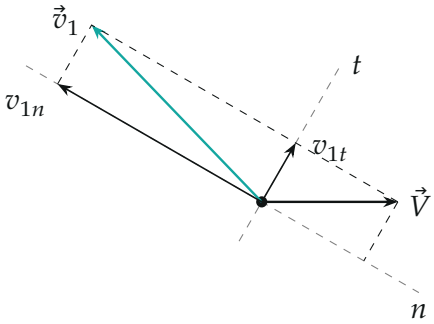
4. Удар по оси n. Закон сохранения импульса системы двух шайб в проекции на n (внешних сил в плоскости стола нет) и закон сохранения

кинетической энергии (удар упругий; t-составляющие не меняются, поэтому сохраняется и энергия движения вдоль n):

$$u_{1n} + u_{2n} = v_{1n} + v_{2n}, \qquad u_{1n}^2 + u_{2n}^2 = v_{1n}^2 + v_{2n}^2.$$

Кроме исходного решения у этой системы одно решение — обмен проекциями: $v_{1n} = u_{2n}$, $v_{2n} = u_{1n}$. Значит,

$$v_{1n} = -2V\cos\beta = -\sqrt{3}\,V.$$



Первая шайба: проекция на касательную t та же, что до удара ($V/2$), проекция на линию центров n стала $-\sqrt{3}\,V$ (досталась от второй шайбы). Пунктиры — проекции $\vec{V}$ на оси.

Пункт 1.

5. Модуль скорости после удара — по теореме Пифагора в осях n, t:

$$V_1 = \sqrt{v_{1t}^2 + v_{1n}^2} = V\sqrt{\sin^2\beta + 4\cos^2\beta} = V\sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{\sqrt{13}}{2}\,V \approx 1{,}8\,V.$$

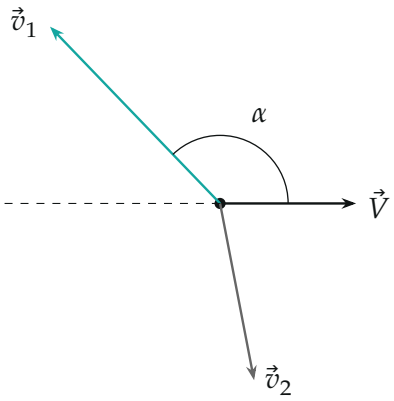
Пункт 2.

6. Угол поворота. Найдём угол γ между $\vec{v}_1$ и осью $-n$ (она смотрит назад, от второй шайбы):

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_{1t}}{|v_{1n}|} = \frac{V\sin\beta}{2V\cos\beta} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad \gamma \approx 16{,}1^\circ.$$

Ось $-n$ образует с $\vec{V}$ угол $180^\circ - \beta = 150^\circ$, а $\vec{v}_1$ отклонена от $-n$ к оси t, то есть в сторону $\vec{V}$, на γ. Поэтому

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{5\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 134^\circ \approx 2{,}34 \text{ рад.}$$



Скорости после удара в масштабе: $\vec{v}_1 = (-\frac{5}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4})V$, $\vec{v}_2 = (\frac{1}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4})V$ *(ось x — вдоль $\vec{V}$). Угол поворота первой шайбы* $\alpha \approx 134^\circ$.

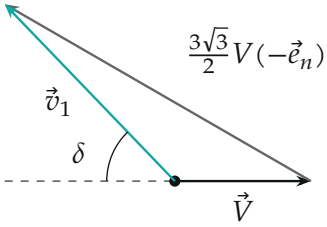
Второй способ: система отсчёта первой шайбы. Перейдём в систему, движущуюся со скоростью $\vec{V}$: в ней первая шайба покоится, вторая налетает со скоростью $-3\vec{V}$. При упругом ударе одинаковых шайб, одна из которых покоилась, покоившаяся получает проекцию скорости налетающей на линию центров: $3V\cos\beta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}V$ вдоль $-n$. Возвращаемся в лабораторную систему, добавляя $\vec{V}$:

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{3\sqrt{3}}{2}V\,(-\vec{e}_n),$$

$$v_{1x} = V - \frac{3\sqrt{3}}{2}V\cos\beta = -\frac{5}{4}V, \qquad v_{1y} = \frac{3\sqrt{3}}{2}V\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}V.$$

Модуль $\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{27}{16}}\,V = \frac{\sqrt{13}}{2}V$; угол с $\vec{V}$: $\alpha = \pi - \delta$, $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$, $\delta \approx 46{,}1^\circ$,

$\alpha \approx 133{,}9^\circ$ — то же.



Второй способ: скорость первой шайбы — сумма скорости системы отсчёта $\vec{V}$ и скорости, полученной в этой системе по линии центров.

Обратите внимание. «Обмен скоростями» у одинаковых шайб происходит только для проекций на линию центров; касательные проекции остаются у своих шайб. И угол α — между векторами скорости до и после, а не между $\vec{v}_1$ и линией центров.

Ответ:

$$V_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}\,V \approx 1{,}8\,V, \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 2{,}34 \text{ рад} \approx 134^\circ.$$

Проверка. Сохранение (python): суммарный импульс $(1-2;\,0)V = (-1;\,0)V$ до и $(-\frac{5}{4}+\frac{1}{4};\,0)V$ после; энергия $\propto V^2 + 4V^2 = 5V^2$ до и $\frac{13}{4}V^2 + \frac{7}{4}V^2 = 5V^2$ после. Размерность V_1 — скорость. Предельный случай $\beta \to 0$ (лобовой удар): $V_1 \to 2V$, $\alpha \to 180^\circ$ — шайбы обменялись скоростями, как и должно быть.

Смысл: гладкие шайбы обмениваются только проекциями на линию центров, а угол удара задаётся геометрией касания.

Ответ. 1) $V_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}V \approx 1{,}8\,V$; 2) $\alpha = \frac{5\pi}{6} - \gamma \approx 2{,}34$ рад $\approx 134^\circ$, где $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.