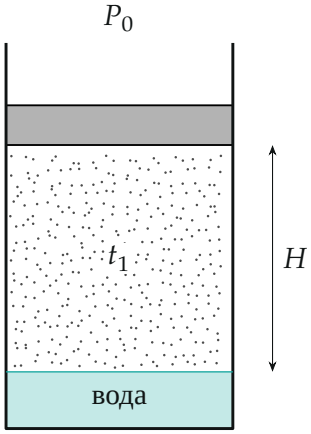
Вода и влажный воздух под поршнем при охлаждении

Задача 4. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 4] В цилиндре с вертикальными гладкими стенками под покоящимся поршнем находятся вода и влажный воздух при температуре $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$. Площадь поршня $S = 100$ см^2, масса M поршня такова, что $Mg = 0{,}5P_0S$, здесь $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па — давление в окружающей атмосфере. Высота поршня над поверхностью воды $H = 20$ см. Температуру в цилиндре медленно уменьшили до $t_2 = 7\,^\circ\text{C}$. Давление водяного пара при $t_2 = 7\,^\circ\text{C}$ считайте пренебрежимо малым. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Молярная масса воды $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

1. Найдите парциальное давление $P_{\text{СВ}}$ сухого воздуха в цилиндре под поршнем при $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$.
2. На каком расстоянии h от поверхности воды остановится поршень при $t_2 = 7\,^\circ\text{C}$?



Поясняющий рисунок: под поршнем вода и влажный воздух (сухой воздух + водяной пар).

▲ **Решение. Что происходит.** Под поршнем смесь двух газов: сухого воздуха и водяного пара. Над водой пар насыщенный, и при 100 °C его

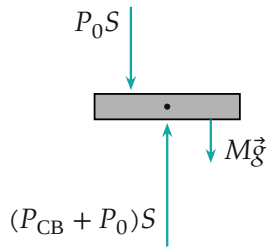
давление равно нормальному атмосферному, P_0 (вода кипит при 100 °C именно потому, что давление её насыщенного пара равно 10^5 Па). Давление смеси — сумма парциальных давлений (закон Дальтона), а его задаёт равновесие поршня. При охлаждении пар конденсируется, а сухой воздух остаётся весь — для него и пишем уравнение Менделеева — Клапейрона. Поршень всё время в равновесии (процесс медленный), поэтому давление смеси под ним постоянно.

Обозначения. $P_{\text{СВ}}$, $P'_{\text{СВ}}$ — давление сухого воздуха при $T_1 = 373$ К и $T_2 = 280$ К; $P_{\text{п}} = P_0$ — давление насыщенного пара при T_1; ν — количество сухого воздуха; h — высота поршня над водой в конце.

Пункт 1.

1. Условие равновесия поршня. На поршень действуют сила тяжести Mg и сила атмосферного давления P_0S вниз, сила давления смеси $(P_{\text{СВ}} + P_{\text{п}})S$ снизу вверх; стенки гладкие, трения нет. Второй закон Ньютона для покоящегося поршня в проекции на вертикаль:

$$(P_{\text{СВ}} + P_{\text{п}})S = P_0S + Mg = 1{,}5P_0S.$$



Силы на поршень при t_1. Длины — по модулю: P_0S, $0{,}5P_0S$ и $1{,}5P_0S$.

2. Закон Дальтона и насыщенный пар. Пар над водой насыщенный, $P_{\text{п}} = P_0$:

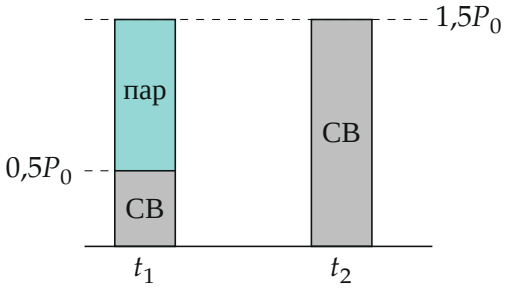
$$P_{\text{СВ}} = 1{,}5P_0 - P_0 = 0{,}5P_0 = 0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Пункт 2.

3. Давление при t_2. Пар почти весь сконденсировался, его давление пренебрежимо мало, поэтому под поршнем практически один сухой воз-

дух. Поршень снова в равновесии:

$$P'_{\text{СВ}}S = P_0S + Mg \quad \Rightarrow \quad P'_{\text{СВ}} = 1{,}5P_0.$$



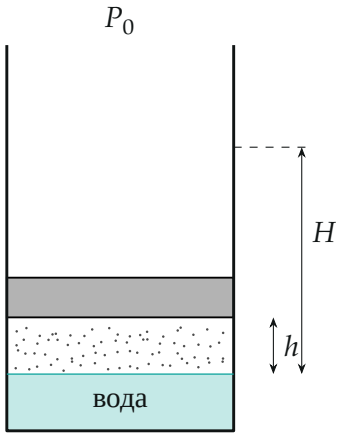
Состав давления под поршнем. Полное давление одно и то же, $1{,}5P_0$: при t_1 это $0{,}5P_0$ сухого воздуха и P_0 пара, при t_2 — один сухой воздух.

4. Уравнение Менделеева — Клапейрона для сухого воздуха. Количество ν сухого воздуха не меняется (он не конденсируется и не уходит); объём, который он занимает, — весь объём под поршнем над водой:

$$P_{\text{СВ}}SH = \nu RT_1, \qquad P'_{\text{СВ}}Sh = \nu RT_2.$$

Разделим второе на первое:

$$h = H\,\frac{P_{\text{СВ}}}{P'_{\text{СВ}}} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 20\text{ см} \cdot \frac{0{,}5}{1{,}5} \cdot \frac{280}{373} \approx 5\text{ см}.$$



Конец: поршень опустился с высоты H до $h \approx H/4$ (в масштабе); под ним только сухой воздух.

Обратите внимание. Пар нельзя просто «сжать» как газ: насыщенный пар при охлаждении конденсируется, и его давление определяется только температурой. Поэтому уравнение состояния пишем для сухого воздуха, а не для смеси. Уровень воды при этом почти не меняется: пара было $\dfrac{P_0 S H \mu_1}{R T_1} \approx 1{,}2$ г, это слой воды толщиной около 0,1 мм — им можно пренебречь (для этой оценки и дана μ_1).

Ответ:

$$P_{\text{СВ}} = \frac{Mg}{S} = 0{,}5P_0 = 0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Па}, \qquad h = H\,\frac{P_{\text{СВ}} T_2}{(P_0 + Mg/S)\,T_1} \approx 5 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность: h — см, остальное — безразмерные отношения. Если бы пара не было и температура не менялась ($P_{\text{СВ}} = P'_{\text{СВ}}$, $T_2 = T_1$), получилось бы $h = H$ — верно. Численно (python): $h = 5{,}004$ см; количество сухого воздуха $\nu = \dfrac{P_{\text{СВ}} S H}{R T_1} \approx 0{,}032$ моль.

Смысл: поршень держит постоянное давление, а охлаждение убирает пар целиком — сухому воздуху приходится и остыть, и в одиночку выдержать втрое большее давление.

Ответ. 1) $P_{\text{СВ}} = 0{,}5P_0 = 0{,}5 \cdot 10^5$ Па; 2) $h = H\dfrac{P_{\text{СВ}} T_2}{1{,}5 P_0 T_1} \approx 5$ см.