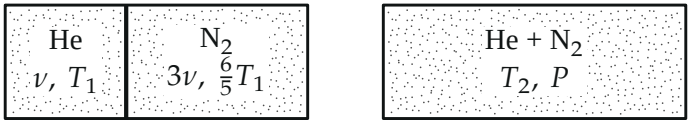
Смесь газов с разной молярной теплоёмкостью

Задача 5. [Физтех 2018/19, 10 класс, задача 5] Теплоизолированный сосуд объёмом V разделён на две части перегородкой. В одной части находится гелий в количестве ν при температуре T_1, а в другой — азот в количестве 3ν при температуре $\frac{6}{5}T_1$ и другом давлении. Перегородка прорывается. Известно, что молярная теплоёмкость азота при постоянном объёме равна $2{,}5R$.

1. Какая температура T_2 установится в смеси?
2. Найти давление P в смеси.



Поясняющий рисунок: до и после прорыва перегородки; сосуд жёсткий, объём V.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Газы перемешиваются в жёстком теплоизолированном сосуде: тепла нет ($Q = 0$), работы над внешними телами нет ($A = 0$, стенки неподвижны). По первому закону термодинамики сохраняется полная внутренняя энергия системы «гелий + азот». Внутренняя энергия идеального газа — $\nu C_V T$, у смеси — сумма энергий компонентов. Отсюда температура. Давление — по закону Дальтона: каждый газ занимает весь объём V.

Обозначения. $C_{V\mathrm{He}} = \frac{3}{2}R$ (гелий одноатомный), $C_{V\mathrm{N_2}} = \frac{5}{2}R$ (дано); T_2 — общая температура смеси; P_{He}, $P_{\mathrm{N_2}}$ — парциальные давления в смеси.

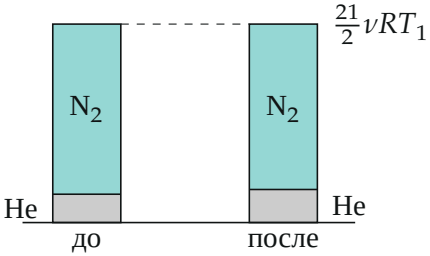
Пункт 1.

1. Первый закон термодинамики для системы двух газов. $Q = \Delta U + A$, где $Q = 0$ и $A = 0$, значит $\Delta U = 0$:

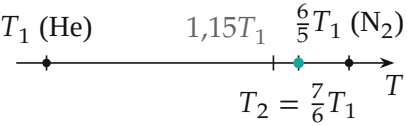
$$\nu C_{V\mathrm{He}} T_1 + 3\nu C_{V\mathrm{N_2}} \cdot \frac{6}{5}T_1 = \nu C_{V\mathrm{He}} T_2 + 3\nu C_{V\mathrm{N_2}} T_2.$$

Подставим теплоёмкости и сократим на νR:

$$\left(\frac{3}{2}+3\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}\right)T_1=\left(\frac{3}{2}+3\cdot\frac{5}{2}\right)T_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{21}{2}T_1=9T_2 \quad\Rightarrow\quad T_2=\frac{7}{6}T_1.$$



Внутренняя энергия в масштабе. До: гелий $\frac{3}{2}\nu RT_1$, азот $9\nu RT_1$. После: гелий $\frac{7}{4}\nu RT_1$, азот $\frac{35}{4}\nu RT_1$. Сумма та же — азот отдал гелию $\frac{1}{4}\nu RT_1$.



Температуры на оси в масштабе. Бирюзовая точка — ответ T_2; серая метка $1{,}15T_1$ — неверное «среднее по молям», без учёта разной теплоёмкости.

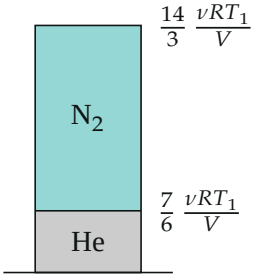
Пункт 2.

2. Уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого газа смеси. После смешения каждый газ занимает весь сосуд объёмом V при температуре T_2:

$$P_{\text{He}}=\frac{\nu RT_2}{V}, \qquad P_{\text{N}_2}=\frac{3\nu RT_2}{V}.$$

3. Закон Дальтона. Давление смеси — сумма парциальных давлений:

$$P=P_{\text{He}}+P_{\text{N}_2}=\frac{4\nu RT_2}{V}=\frac{4\nu R}{V}\cdot\frac{7}{6}T_1=\frac{14}{3}\cdot\frac{\nu RT_1}{V}.$$



Давление смеси: парциальное давление азота втрое больше, чем гелия (молей втрое больше).

Обратите внимание. Энергию считаем с теплоёмкостью C_V даже для газа, который «расширился» на весь сосуд: работы над внешними телами нет, а работа газов друг над другом внутренняя. И внутренние энергии складываются с *разными* теплоёмкостями — температура смеси не среднее по молям ($\frac{1+3\cdot1{,}2}{4}T_1 = 1{,}15T_1$), а среднее, взвешенное по νC_V.

Ответ:

$$T_2 = \frac{C_{V\mathrm{He}}T_1 + 3C_{V\mathrm{N_2}}\cdot\frac{6}{5}T_1}{C_{V\mathrm{He}} + 3C_{V\mathrm{N_2}}} = \frac{7}{6}T_1, \qquad P = \frac{4\nu RT_2}{V} = \frac{14}{3}\cdot\frac{\nu RT_1}{V}.$$

Проверка. T_2 лежит между T_1 и $\frac{6}{5}T_1$, ближе к температуре азота (у азота больше и молей, и теплоёмкость) — так и должно быть. Размерность P: $\frac{\text{моль}\cdot\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot\text{К}}{\text{м}^3} = \text{Па}$. Энергия до и после (python, в единицах νRT_1): $1{,}5 + 9 = 10{,}5$ и $1{,}75 + 8{,}75 = 10{,}5$.

Смысл: в жёстком теплоизолированном сосуде сохраняется внутренняя энергия, а давление смеси складывается из давлений компонентов.

Ответ. 1) $T_2 = \frac{7}{6}T_1$; 2) $P = \frac{14}{3}\cdot\frac{\nu RT_1}{V}$.