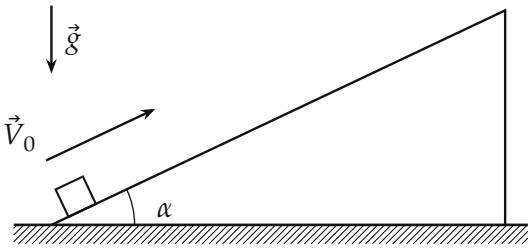
Шайба на подвижном клине

Задача 1. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α такой, что $\cos\alpha = 0{,}6$. Если шайбе, находящейся у основания клина, сообщить начальную скорость V_0 вдоль поверхности клина (см. рис.), то к моменту достижения шайбой высшей точки траектории скорость шайбы уменьшается в $n = 5$ раз. В процессе движения шайба безотрывно скользит по клину, а клин — по столу. Ускорение свободного падения g. Известными считать V_0, n и α.

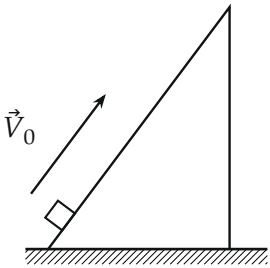


1. Найдите отношение m/M массы шайбы к массе клина.
2. На какую максимальную высоту H, отсчитанную от точки старта, поднимается шайба в процессе движения по клину?
3. Через какое время T после старта шайба поднимается на максимальную высоту?

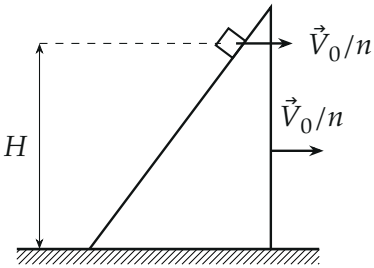
▲ **Решение.** **Что происходит.** Шайба въезжает на клин, давит на него, и клин разгоняется вправо по гладкому столу. Шайба замедляется относительно клина и в высшей точке относительно него покоится: в этот момент шайба и клин движутся как одно целое с одной общей горизонтальной скоростью V_0/n. Это и есть главное условие задачи. Задача на систему тел без трения: сохраняется горизонтальная составляющая импульса и механическая энергия, а для времени удобна проекция на наклонную ось.

Обозначения. m и M — массы шайбы и клина, $\vec{N}$ — сила, с которой клин действует на шайбу (по нормали к склону, трения нет), H — высота

подъёма, S — путь шайбы по склону. Ось x — горизонтально вправо, ось x' — вдоль склона вверх. Значения: $\cos\alpha = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}8$, $n = 5$.



в начале



в высшей точке

Состояния системы. Слева шайба стартует со скоростью V_0 вдоль склона. Справа — высшая точка: скорости шайбы и клина одинаковы и горизонтальны, клин успел сдвинуться вправо.

Пункт 1.

1. Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса. Рассмотрим систему «шайба + клин» за время от старта до высшей точки. Внешние силы — сила тяжести и реакция стола, обе вертикальные; стол гладкий, горизонтальных внешних сил нет. Сила $\vec{N}$ между шайбой и клином внутренняя. Значит, проекция импульса системы на ось x сохраняется, а на вертикаль — нет (реакция стола меняется, пока шайба давит на склон). В начале клин покоится, а проекция скорости шайбы на ось x равна $V_0\cos\alpha$; в высшей точке скорость обоих тел равна V_0/n:

$$mV_0\cos\alpha = (M+m)\,\frac{V_0}{n} \quad\Rightarrow\quad \frac{M+m}{m} = n\cos\alpha = 3,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{n\cos\alpha - 1} = \frac{1}{2}.$$

Пункт 2.

2. Закон сохранения механической энергии. Трения нет, а сила $\vec{N}$ перпендикулярна относительной скорости тел: её работа на шайбе и на клине в сумме равна нулю (работы $\vec{N}$ и $-\vec{N}$ в сумме равны $\vec{N}\cdot\vec{v}_{\text{отн}}\,\Delta t = 0$). Реакция стола работы не совершает — клин движется горизонтально.

Поэтому механическая энергия системы сохраняется; за нуль потенциальной энергии берём уровень старта:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{(M+m)}{2}\left(\frac{V_0}{n}\right)^2 + mgH.$$

Разделим на m и подставим $\dfrac{M+m}{m} = n\cos\alpha$ из пункта 1:

$$H = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{n\cos\alpha}{n^2}\right) = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos\alpha}{n}\right) = \frac{V_0^2}{2g}\cdot\frac{22}{25} = \frac{11V_0^2}{25\,g}.$$

Кинетическая энергия уменьшилась, потому что часть её ушла клину, а часть — в потенциальную энергию шайбы.

Пункт 3.

3. Схема «шайба» и выбор оси. Время найдём из проекции скорости шайбы. Для этого нужна сила, действующая на шайбу, а точнее — её составляющая вдоль склона. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{N}$, перпендикулярная склону. Повернём ось: x' вдоль склона вверх, y' по нормали. Зачем так: сила $\vec{N}$ перпендикулярна оси x' и в проекцию не входит, остаётся одна известная сила.

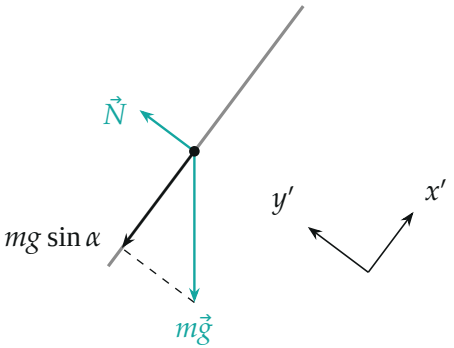


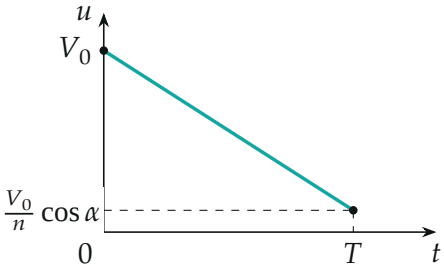
Схема «шайба»: силы и повёрнутые оси. Серая линия — склон. Длины стрелок — по расчёту: $N = \frac{5}{11}mg$. Чёрная стрелка — составляющая $m\vec{g}$ вдоль склона.

Составляющая силы тяжести вдоль x' направлена вниз по склону и равна $mg\sin\alpha$. Значит, проекция ускорения шайбы в лабораторной системе (связанной со столом) постоянна: $a_{x'} = -g\sin\alpha$. Обратите внимание: это верно, хотя клин ускоряется и шайба движется по сложной траектории — в проекцию на x' входит только сила тяжести.

4. Кинематика вдоль оси x'. В начале проекция скорости шайбы на ось x' равна V_0. В высшей точке скорость шайбы горизонтальна и равна V_0/n; её проекция на x' равна $\dfrac{V_0}{n}\cos\alpha$. Ускорение постоянно, поэтому

$$\frac{V_0}{n}\cos\alpha = V_0 - g\sin\alpha\cdot T,$$

$$T = \frac{V_0}{g\sin\alpha}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right) = \frac{V_0}{0{,}8\,g}\cdot 0{,}88 = \frac{11V_0}{10\,g}.$$



Проекция и скорости шайбы на ось x': прямая с наклоном $-g\sin\alpha$. На оси t время откладывается в единицах V_0/g, на оси u — в единицах V_0.

Второй способ: в системе отсчёта клина. Относительно клина шайба движется по прямой вдоль склона, а силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и сила инерции $-m\vec{A}$ (клин ускоряется с $\vec{A}$, направленным по оси x) постоянны. Докажем, что $\vec{N}$ и A постоянны. По нормали к склону относительное ускорение нулевое: $N + mA\sin\alpha = mg\cos\alpha$. Для клина: $MA = N\sin\alpha$. Это два линейных уравнения с постоянными коэффициентами, поэтому N и A постоянны. Подставляя $M = 2m$, находим $A = \dfrac{2}{11}g$, а относительное

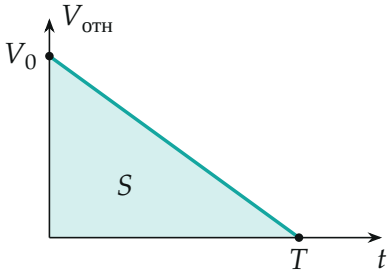
ускорение шайбы вдоль склона

$$a_{\text{отн}} = g\sin\alpha + A\cos\alpha = \frac{10}{11}g \quad \text{(постоянно)}.$$

Шайба тормозится равномерно от V_0 до нуля, поэтому её путь по склону и время торможения

$$S = \frac{V_0^2}{2a_{\text{отн}}} = \frac{11V_0^2}{20\,g}, \qquad T = \frac{V_0}{a_{\text{отн}}} = \frac{11V_0}{10\,g}.$$

Высота: $H = S\sin\alpha = \dfrac{11V_0^2}{20g}\cdot 0{,}8 = \dfrac{11V_0^2}{25g}$ — совпало с пунктом 2. Время T то же, что в пункте 4.



Скорость шайбы относительно клина: площадь треугольника равна пути S по склону. Время откладывается в единицах V_0/g, скорость — в единицах V_0.

Проверка. Размерности: m/M безразмерно, $H \sim V_0^2/g$ — метр, $T \sim V_0/g$ — секунда. Предел: пусть клин очень тяжёлый, $M \to \infty$; тогда $n\cos\alpha = (M+m)/m \to \infty$, и формулы дают $H = V_0^2/(2g)$ и $T = V_0/(g\sin\alpha)$ — так движется шайба по неподвижной горке. Согласованность: $A\,T = \frac{2}{11}g\cdot\frac{11V_0}{10g} = \frac{V_0}{5}$ — скорость клина в высшей точке, как и требует условие. Шайба отдаёт клину часть кинетической энергии, поэтому поднимается ниже, чем на неподвижной горке: $0{,}44\,V_0^2/g < 0{,}5\,V_0^2/g$.

Ответ. 1) $\dfrac{m}{M} = \dfrac{1}{2}$; 2) $H = \dfrac{11V_0^2}{25\,g}$; 3) $T = \dfrac{11V_0}{10\,g}$.