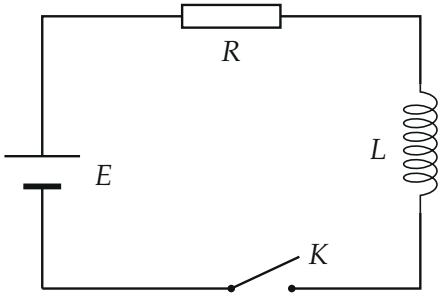
Включение катушки: скорость изменения энергии и мощность

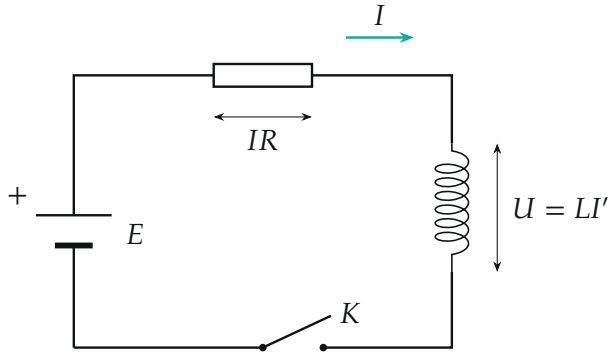
Задача 3. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 3] В электрической цепи (см. рис.) все элементы идеальные, их параметры указаны. Ключ K замыкают.



1. Найти напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа.
2. Найти максимальную скорость изменения энергии N_m в катушке индуктивности.
3. Найти скорость изменения тока в цепи в момент, когда скорость изменения энергии в катушке равна $\dfrac{24}{49}$ от максимальной скорости N_m.

▲ **Решение. Что происходит.** После замыкания ключа ток нарастает не мгновенно: катушка противится изменению тока, и в первый миг почти всё напряжение источника падает на ней. Потом ток растёт, напряжение на резисторе увеличивается, на катушке — падает. Скорость изменения энергии катушки N в начале равна нулю (тока нет), в конце тоже нуль (ток установился, он перестал меняться), а между ними — максимум. Задача на переходный процесс в RL-цепи; ключ — выразить всё через одну переменную, напряжение на катушке.

Обозначения. U — напряжение на катушке, I — ток в цепи, $I' = dI/dt$ — скорость его изменения. Энергия катушки $W = LI^2/2$, её скорость изменения $N = dW/dt$.



Цепь в произвольный момент после замыкания: ток течёт по часовой стрелке, напряжения на катушке и резисторе в сумме дают E.

Пункт 1.

1. Напряжение сразу после замыкания. Запишем закон Ома для замкнутой цепи (второе правило Кирхгофа) для произвольного момента: ЭДС источника равна сумме напряжений на резисторе и на катушке,

$$E = IR + U.$$

Зачем так: ток в катушке не может измениться скачком (иначе $U = LI'$ стало бы бесконечным), а до замыкания он был нулевой, поэтому в первый момент $I = 0$. Тогда $IR = 0$ и

$$U_0 = E.$$

Всё напряжение источника приложено к катушке. Обратите внимание: напряжение на катушке равно E не потому, что она «заряжена», а потому, что тока ещё нет.

Пункт 2.

2. Скорость изменения энергии катушки. Энергия катушки $W = LI^2/2$, поэтому $N = \dfrac{dW}{dt} = LI\,I'$. Напряжение на катушке $U = LI'$, значит,

$$N = UI.$$

(Это мощность, с которой катушка получает энергию.) Выразим ток через U из закона Ома $E = IR + U$ и получим функцию одной переменной.

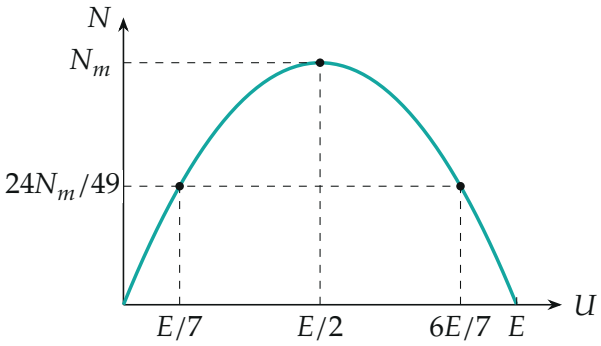
Ток равен $I = (E - U)/R$, поэтому

$$N(U) = \frac{U(E-U)}{R} = -\frac{1}{R}\Big(U - \frac{E}{2}\Big)^2 + \frac{E^2}{4R}.$$

Это парабола с ветвями вниз; наибольшее значение — в вершине, при $U = E/2$:

$$N_m = \frac{E^2}{4R}.$$

Тот же результат даёт неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: у двух чисел U и $E-U$ постоянная сумма E, а произведение $U(E-U) \le (E/2)^2$, равенство при $U = E-U$. Физически: мощность в катушке максимальна, когда напряжение источника делится между катушкой и резистором поровну, $U = IR = E/2$.



ход времени: U убывает от E до нуля

Скорость изменения энергии катушки $N = U(E-U)/R$ как функция напряжения на ней. С течением времени U убывает от E до нуля, и точка идёт по параболе справа налево.

Пункт 3.

3. Какие значения U подходят. По условию $N = \alpha N_m$, $\alpha = \dfrac{24}{49}$. Подставим $N(U)$:

$$\frac{U(E-U)}{R} = \alpha\,\frac{E^2}{4R} \quad \Rightarrow \quad U^2 - EU + \frac{\alpha E^2}{4} = 0.$$

Квадратное уравнение; его дискриминант $E^2(1-\alpha) = E^2\cdot\dfrac{25}{49}$ — полный квадрат:

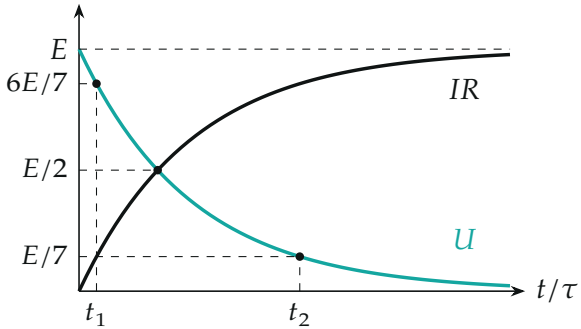
$$U = \frac{E}{2}(1 \pm \sqrt{1-\alpha}) = \frac{E}{2}\Big(1 \pm \frac{5}{7}\Big), \qquad U_1 = \frac{6E}{7}, \quad U_2 = \frac{E}{7}.$$

Оба корня подходят: параболе принадлежат две точки с одним значением N, а процесс проходит по ней целиком — сначала N растёт (катушка набирает энергию всё быстрее), потом падает. Поэтому есть два момента времени: до максимума (U_1) и после него (U_2).

4. Скорость изменения тока. По определению $U = LI'$, поэтому

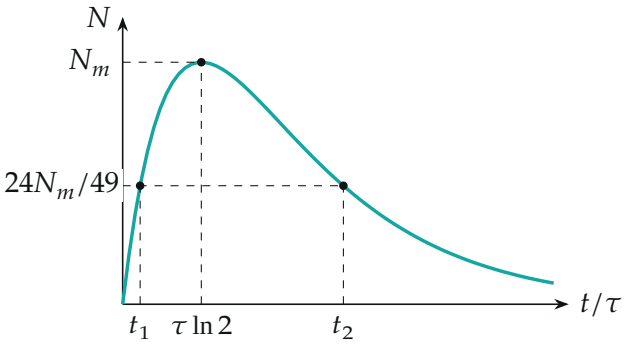
$$I' = \frac{U}{L}: \qquad I'_1 = \frac{6}{7}\frac{E}{L}, \qquad I'_2 = \frac{1}{7}\frac{E}{L}.$$

Знак: оба положительны, ток растёт; к концу процесса скорость его роста уменьшается.



Напряжения на катушке $U = Ee^{-t/\tau}$ и на резисторе $IR = E(1-e^{-t/\tau})$, $\tau = L/R$. В момент $t_1 = \tau\ln\frac{7}{6}$ напряжение на катушке равно $\frac{6}{7}E$, в момент $t_2 = \tau\ln 7$ — $\frac{1}{7}E$.

5. Как всё это идёт во времени. Ток нарастает по закону $I = \dfrac{E}{R}(1-e^{-t/\tau})$, $\tau = \dfrac{L}{R}$, поэтому $U = LI' = Ee^{-t/\tau}$. Максимум N в момент $U = E/2$, то есть $t = \tau\ln 2$. Моменты нашей задачи: $U = \frac{6}{7}E$ при $t_1 = \tau\ln\frac{7}{6} \approx 0{,}15\,\tau$ и $U = \frac{1}{7}E$ при $t_2 = \tau\ln 7 \approx 1{,}95\,\tau$.



Скорость изменения энергии катушки со временем: нуль в начале, максимум в момент $\tau \ln 2$, затем спад; уровень $\frac{24}{49}N_m$ достигается дважды — в моменты t_1 и t_2.

Проверка. Размерности: E^2/R — ватт, E/L — ампер в секунду. Баланс мощностей: источник отдаёт $EI = UI + I^2R$ — часть идёт в энергию катушки ($N = UI$), часть — в тепло на резисторе. Предел: при $U = E/2$ получаем $N_m = E^2/(4R)$ — ровно четверть мощности E^2/R, которую источник отдал бы одному резистору при коротком замыкании катушки. Смысл: сначала катушка почти не получает энергии (мал ток), в конце — тоже (ток не меняется), максимум — посередине. Оба ответа пункта 3 верны.

Ответ. 1) $U_0 = E$; 2) $N_m = \dfrac{E^2}{4R}$; 3) $I_1' = \dfrac{6}{7}\dfrac{E}{L}$ (раньше максимума) или $I_2' = \dfrac{1}{7}\dfrac{E}{L}$ (после максимума).