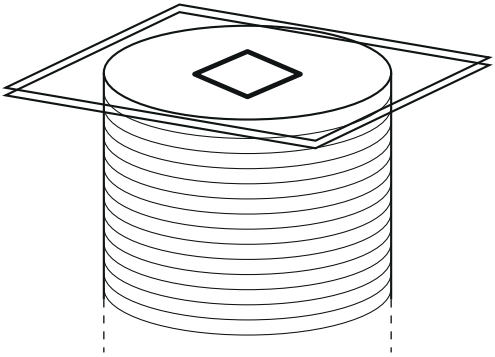
Рамка в поле переменного соленоида

Задача 4. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 4] По длинному соленоиду пропускается переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону с циклической частотой ω. В результате вдали от торцов соленоида возникает однородное магнитное поле с максимальной индукцией B_0. В плоскости торца соленоида между двумя закреплёнными тонкими гладкими стеклянными пластинами помещена прямоугольная жёсткая рамка из проволоки со сторонами a и $2a$ (см. рис.). Зазор между пластинами незначительно больше диаметра проволоки. Сопротивление единицы длины проволоки — ρ. Индуктивность рамки не учитывать. Размеры рамки сравнимы с диаметром соленоида.



1. Найти максимальный ток в рамке.
2. Найти максимальную силу натяжения длинной стороны рамки.

▲ **Решение. Что происходит.** Ток соленоида меняется, значит, меняется поле на его торце и поток через рамку; по закону Фарадея в рамке возникает ЭДС, по закону Ома — ток, а на ток в поле действует сила Ампера, которая растягивает или сжимает рамку. Это шаблон «индукция»: ЭДС → цепь → механика. Главная трудность — поле на торце: оно не равно B_0 (полю внутри соленоида вдали от торцов), но однородно по всей рамке; его величину даёт симметрия. Силы Ампера от осевого поля лежат в плоскости рамки; радиальную составляющую поля, тянущую проволоку из плоскости, держат стеклянные пластины.

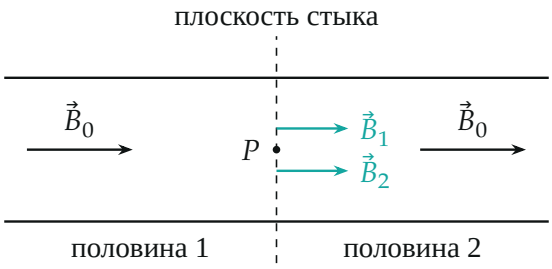
Обозначения. a и $b = 2a$ — стороны рамки; ось x — вдоль оси соленоида, на нас; $B_x(t)$ — осевая составляющая индукции на торце; $S = ab = 2a^2$ — площадь рамки; $r = \rho \cdot 2(a + b) = 6a\rho$ — сопротивление рамки. Положительный ток — против часовой стрелки при взгляде навстречу оси x.

Пункт 1.

1. Поле на торце. Поставим вплотную два одинаковых соленоида, один продолжает другой: получится сплошной длинный соленоид с индукцией $B_0 \cos \omega t$ внутри. Рассмотрим точку P плоскости стыка внутри витков. Зеркальное отражение в этой плоскости переводит одну половину в другую, а осевую составляющую поля не меняет. Поэтому обе половины создают в P одинаковые осевые поля $B_1 = B_2$, а в сумме они дают поле сплошного соленоида $B_0 \cos \omega t$:

$$B_x(t) = \frac{1}{2} B_0 \cos \omega t.$$

Это верно в любой точке сечения внутри витков, и рамка лежит там целиком. (На оси то же даёт закон Био — Савара для полубесконечного соленоида.) Обратите внимание: вдвое меньшее поле на торце — не приближение, а точный результат симметрии.



Сплошной соленоид, мысленно разрезанный на две половины. В точке разреза поля половин одинаковы ($B_1 = B_2$) и вместе дают B_0.

2. ЭДС индукции. Поле на площади рамки однородно, рамка неподвижна, поэтому поток

$$\Phi = B_x(t)\, S = \frac{1}{2} B_0\, ab \cos \omega t.$$

По закону Фарадея ЭДС равна взятой со знаком минус скорости изменения потока:

$$\varepsilon = -\Phi' = \frac{1}{2} B_0\, ab\, \omega \sin \omega t.$$

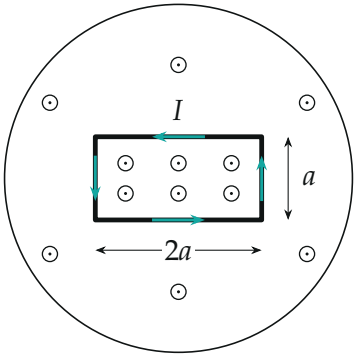
Индуктивность рамки по условию не учитываем, поэтому закон Ома для рамки — просто $I = \varepsilon / r$.

3. Ток. Подставим $b = 2a$ и $r = 6a\rho$:

$$I = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{B_0 \omega\, a^2 \sin \omega t}{6a\rho} = \frac{B_0 \omega a}{6\rho} \sin \omega t.$$

Максимальное значение, при $\sin \omega t = 1$:

$$I_0 = \frac{B_0 \omega a}{6\rho}.$$



Вид со стороны, куда направлено поле: поле B_x (кружки с точкой) пронизывает рамку и всё сечение соленоида; ток $I > 0$ идёт против часовой стрелки.

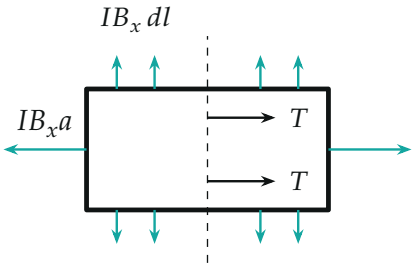
Пункт 2.

4. Силы Ампера на стороны рамки. На элемент проволоки длиной dl с током I в поле B_x действует сила $dF = IB_x\, dl$; она перпендикулярна проводу и лежит в плоскости рамки (поле перпендикулярно плоскости). Если $IB_x > 0$, ток идёт против часовой стрелки при поле «на нас», и сила направлена наружу: рамка растягивается. Если $IB_x < 0$ — внутрь:

рамка сжимается. Результирующие силы на каждую из сторон: короткая сторона — $IB_x a$ вдоль длинной стороны, длинная — $IB_x b$ поперёк неё.

5. Натяжение длинной стороны. Мысленно разрежем рамку поперёк обеих длинных сторон посередине и рассмотрим левую половину. В проекции на ось вдоль длинной стороны работают три силы: сила Ампера на короткую сторону $IB_x a$, направленная наружу, и силы натяжения T в двух разрезанных длинных сторонах, направленные внутрь. Зачем так: силы Ампера на длинные стороны перпендикулярны этой оси и в проекцию не входят, и остаются только три слагаемых. Рамка в равновесии (стекло держит её, масса мала):

$$2T = IB_x a \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} IB_x a.$$



Силы Ампера на рамку при $IB_x > 0$ (рамка растягивается) и разрез пополам: на левую половину справа действуют два натяжения T (чёрные стрелки), слева — сила $IB_x a$ на короткую сторону. Стрелки T для наглядности сдвинуты внутрь от провода.

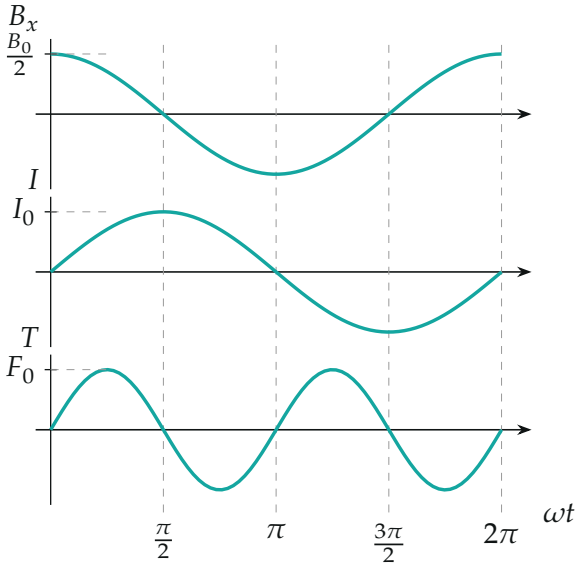
6. Зависимость натяжения от времени. Подставим $B_x = \frac{1}{2} B_0 \cos \omega t$ и $I = I_0 \sin \omega t$:

$$T(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} B_0 \cos \omega t \cdot I_0 \sin \omega t \cdot a = \frac{1}{8} B_0 I_0 a \, \sin 2\omega t.$$

Знак: $T > 0$ — растяжение, $T < 0$ — сжатие; растяжение и сжатие повторяются дважды за период, с частотой 2ω. Максимальное значение

$|T|$ — при $|\sin 2\omega t| = 1$:

$$F_0 = \frac{1}{8} B_0 I_0 a = \frac{1}{8} B_0 a \cdot \frac{B_0 \omega a}{6\rho} = \frac{B_0^2\, \omega\, a^2}{48\, \rho}.$$



Поле на торце $B_x \sim \cos \omega t$, ток $I \sim \sin \omega t$ и натяжение $T \sim \sin 2\omega t$ за один период поля. Масштаб по вертикали у каждого графика свой; на графике T выше оси — растяжение, ниже — сжатие. Максимумы $|T|$ — при $\omega t = \pi/4,\ 3\pi/4, \ldots$

Проверка. Размерности: $B_0 \omega a^2$ — ЭДС в вольтах, делённая на ρa (Ом) даёт ампер; $B_0 I_0 a$ — сила Ампера, ньютон. Знак по правилу Ленца: пока $|B|$ убывает ($0 < \omega t < \pi/2$), поток уменьшается, и рамка стремится расшириться, чтобы его увеличить, — действительно $T = \frac{1}{8} B_0 I_0 a \sin 2\omega t > 0$ — растяжение. Предел: при $\omega \to 0$ ток и сила пропадают. Смысл: сила квадратична по полю ($F \sim B_0^2$) и меняется с частотой 2ω.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{B_0\, \omega\, a}{6\rho}$; 2) $F_0 = \dfrac{B_0^2\, \omega\, a^2}{48\, \rho}$.