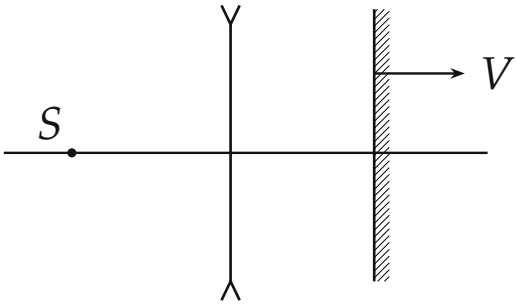
Изображение в рассеивающей линзе и движущемся зеркале

Задача 5. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 5] На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -30$ см находится муравей S на расстоянии $d_1 = 45$ см от линзы (см. рис.). По другую сторону линзы находится плоское зеркало, перемещающееся вдоль главной оптической оси линзы со скоростью $V = 6$ мм/с. В некоторый момент времени t_0 зеркало было на расстоянии $L = 6$ см от линзы.



1. На каком расстоянии от линзы получится изображение муравья при отсутствии зеркала?
2. На каком расстоянии от линзы получится изображение муравья в момент времени t_0 в системе линза — зеркало?
3. С какой скоростью движется изображение муравья в момент времени t_0 в системе линза — зеркало?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Свет от муравья проходит линзу, отражается от зеркала и ещё раз проходит линзу. Изображение в такой системе строим по цепочке: предмет → изображение в линзе → изображение этого изображения в зеркале → изображение в линзе. Главная идея — каждая оптическая деталь даёт изображение предыдущего изображения, как если бы оно было предметом. Плоское зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно зеркала; скорость изображения в нём вдвое больше скорости зеркала.

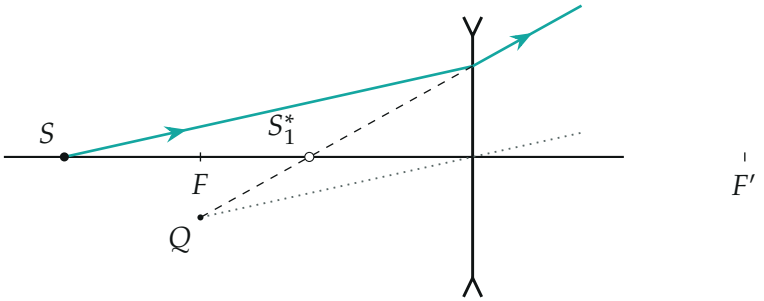
Обозначения. Ось x — по главной оптической оси вправо, начало — в линзе. Формула тонкой линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ с правилом знаков: $d>0$ — предмет на стороне, откуда идёт свет; $F<0$ — рассеивающая линза; $f<0$ — изображение мнимое, на той же стороне от линзы, что предмет. Изображения отмечаем звёздочкой: S_1^*, S_2^*, S_3^*. Расстояния — в сантиметрах.

Пункт 1.

1. Изображение без зеркала. Подставим $d_1=45$ см, $F=-30$ см:

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_1}=-\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=-\frac{5}{90}=-\frac{1}{18}\quad\Rightarrow\quad f_1=-18\text{ см}.$$

Знак «минус»: изображение S_1^* мнимое, расположено слева от линзы (там же, где муравей) на расстоянии $|f_1|=18$ см. Рассеивающая линза всегда даёт мнимое уменьшенное изображение, так и получилось: $|f_1|/d_1=0{,}4$.



Построение S_1^*. Луч, идущий от S в точку линзы на высоте $h=10$ см, преломляется так, что его продолжение идёт через побочный фокус Q — точку пересечения фокальной плоскости с лучом, проведённым через центр линзы параллельно исходному (пунктир и точки). Продолжение пересекает ось в S_1^*, на расстоянии 18 см от линзы; численно Q лежит на 6,7 см ниже оси.

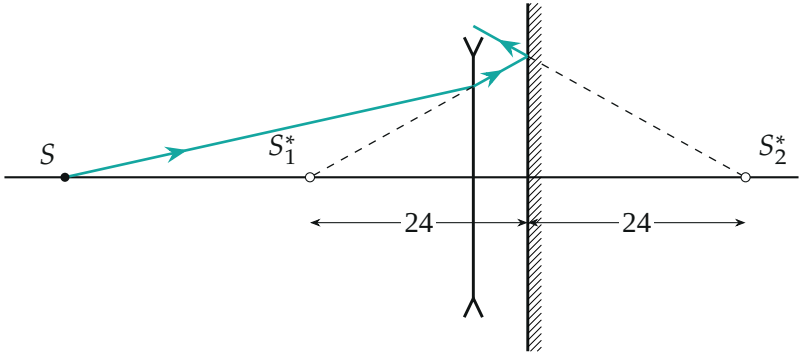
Пункт 2.

2. Зеркало. Лучи, прошедшие линзу, расходятся так, будто идут из мнимой точки S_1^*. Для зеркала она — предмет: расстояние от S_1^* до зеркала $18+L=18+6=24$ см. Плоское зеркало даёт изображение симмет-

рично себе: точка S_2^* лежит за зеркалом на таком же расстоянии 24 см. От линзы она отстоит на

$$d_2 = L + 24 = 6 + 24 = 30 \text{ см}.$$

Свет отражённого пучка идёт к линзе справа налево, расходясь так, будто идёт из S_2^*.

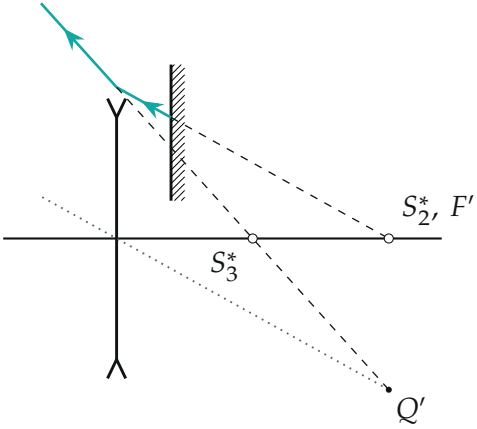


Ход луча от S через линзу, к зеркалу и обратно. Изображение S_1^* в зеркале — точка S_2^*, симметричная ему относительно зеркала (расстояния 24 см и 24 см; числа на рисунке — в сантиметрах).

3. Второй проход через линзу. Теперь S_2^* — предмет для линзы на расстоянии $d_2 = 30$ см (свет идёт справа налево, поэтому $d_2 > 0$). Обратите внимание: сквозь S_2^* свет не проходит — она лежит за зеркалом, но линзе всё равно, откуда расходятся лучи, и формула применима. Подставим:

$$f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = \frac{30 \cdot (-30)}{30 + 30} = -15 \text{ см}.$$

Знак «минус»: изображение мнимое, на той же стороне от линзы, что предмет S_2^*, то есть справа; расстояние $|f_2| = 15$ см. Это и есть изображение муравья в системе линза — зеркало.



Второй проход. Луч от зеркала подходит к линзе на высоте 16,7 см, преломляется так, что его продолжение идёт через побочный фокус Q' (на фокальной плоскости; S_2^* лежит в самом фокусе F'). Продолжение пересекает ось в S_3^* — на расстоянии 15 см справа от линзы.

Пункт 3.

4. Зависимость от положения зеркала. Пусть в момент t расстояние от линзы до зеркала равно L; изображение S_1^* от муравья не зависит и остаётся на месте ($x = -18$ см). Положение S_2^* — симметрия относительно зеркала:

$$x_2 = 2L - (-18) = 2L + 18, \qquad \dot{x}_2 = 2\dot{L} = 2V.$$

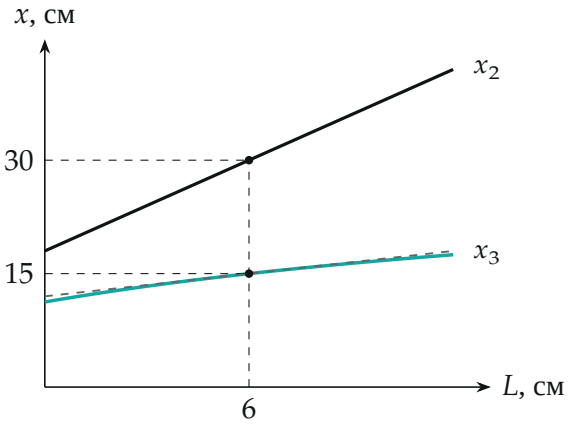
Предмет S_2^* уходит от линзы со скоростью $2V$, зеркало движется от линзы (стрелка на рисунке условия), и расстояние до линзы $d_2 = x_2$ растёт.

5. Скорость изображения. Из формулы линзы $|f_2| = \dfrac{|F|\,d_2}{d_2 + |F|}$ (при $F = -|F|$). Изображение лежит справа от линзы на расстоянии $|f_2|$, поэтому $x_3 = |f_2|$ и

$$u = \dot{x}_3 = \frac{d|f_2|}{d\,d_2}\,\dot{d}_2 = \frac{|F|^2}{(d_2 + |F|)^2} \cdot 2V = \frac{30^2}{60^2} \cdot 2V = \frac{1}{4} \cdot 2V = \frac{V}{2} = 3 \text{ мм/с}.$$

Множитель $\dfrac{|F|^2}{(d_2 + |F|)^2}$ — это квадрат поперечного увеличения: $\Gamma =$

$\frac{|f_2|}{d_2} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, и $\Gamma^2 = \frac{1}{4}$ — продольное увеличение (изображение движется в Γ^2 раз медленнее предмета). Скорость направлена от линзы — туда же, куда движется зеркало.



Положение S_2^* (чёрная линия, наклон 2) и изображения S_3^* (бирюзовая кривая) в зависимости от расстояния L до зеркала; обе длины — от линзы. Серый пунктир — касательная к кривой в точке $L = 6$ см: её наклон $\frac{1}{2}$, то есть $u = \frac{1}{2}V$.

Проверка. Размерности: в формуле линзы обратные длины, скорость — мм/с. Второй способ для скорости — по разностям: сдвинем зеркало на 0,1 см. Тогда $d_2 = 30{,}2$ см, $|f_2| = \frac{30 \cdot 30{,}2}{60{,}2} \approx 15{,}05$ см: изображение сместилось на 0,05 см — вдвое меньше сдвига зеркала, как и даёт ответ $u = V/2$. Другая проверка — предел: если зеркало очень далеко ($L \to \infty$), то $d_2 \to \infty$, $|f_2| \to |F| = 30$ см, а скорость $\Gamma^2 \cdot 2V \to 0$: изображение прижимается к фокусу. Смысл: зеркало удваивает скорость предмета, а линза во второй раз сжимает её вчетверо; так получается $V/2$.

Ответ. 1) 18 см (мнимое изображение, слева от линзы); 2) 15 см (мнимое изображение, справа от линзы); 3) $u = \frac{V}{2} = 3$ мм/с (от линзы).