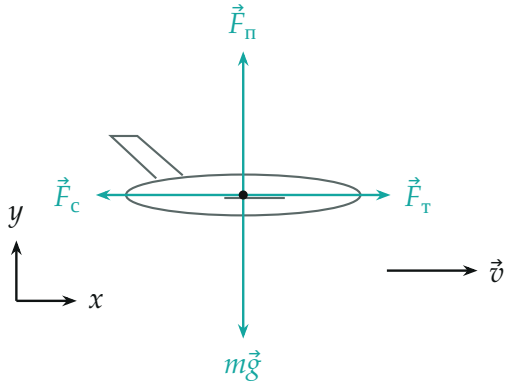
Перелёт самолёта при постоянном аэродинамическом качестве

Задача 1. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 1] Самолёт совершает перелёт дальностью $L = 2000$ км на высоте $h \approx 10$ км. Его скорость изменяется так, что отношение подъёмной силы к силе сопротивления воздуха (аэродинамическое качество самолёта) остаётся постоянным и равным $K = 20$ почти всё время полёта. КПД двигателя $\eta = 40\%$, удельная теплота сгорания топлива $q = 50$ МДж/кг. Масса израсходованного топлива значительно меньше общей массы самолёта. Влиянием ветра пренебречь.

1. Найти отношение x силы тяги (развиваемой двигателем) к силе тяжести, действующей на самолёт.
2. Определите долю α массы израсходованного топлива от массы самолёта.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): силы, действующие на самолёт в горизонтальном полёте. Стрелки $\vec{F}_m$ и $\vec{F}_c$ для наглядности длиннее, чем в масштабе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Самолёт летит горизонтально на постоянной высоте, а скорость меняется так медленно, что в любой момент силы на него уравновешены. По вертикали подъёмная сила держит вес, по горизонтали тяга двигателя уравновешивает сопротивление воздуха.

Из определения качества $K = F_п/F_с$ отсюда сразу следует отношение тяги к весу. Расход топлива — задача на энергию: теплота сгоревшего топлива с КПД η превращается в работу тяги на пути L.

Обозначения. m — масса самолёта (топлива сгорает мало, поэтому m почти не меняется); $\vec{F}_п$ — подъёмная сила (перпендикулярна скорости, вверх); $\vec{F}_с$ — сила сопротивления воздуха (против скорости); $\vec{F}_т$ — сила тяги (по скорости); $m_т$ — масса сгоревшего топлива. Ось x — по скорости, ось y — вверх. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 (с ним получается ответ организаторов).

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для самолёта. Запишем его векторно: $m\vec{g} + \vec{F}_п + \vec{F}_с + \vec{F}_т = m\vec{a}$. Полёт горизонтальный, а ускорение из-за медленного изменения скорости ничтожно мало (оценка — в «Проверке»), поэтому $\vec{a} \approx 0$. Проекции:

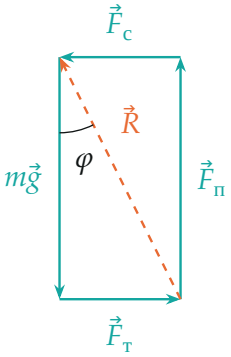
$$y: \quad F_п - mg = 0,$$
$$x: \quad F_т - F_с = 0.$$

Оси вдоль скорости и поперёк неё выбраны потому, что именно вдоль них направлены подъёмная сила и сопротивление: каждое уравнение содержит ровно две силы.

2. Подставляем качество. По определению $K = F_п/F_с = mg/F_т$, откуда

$$x = \frac{F_т}{mg} = \frac{1}{K} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Тяга составляет 5% от веса самолёта. Это отношение остаётся постоянным весь полёт, потому что постоянно K: скорость и сами силы могут меняться, а их отношение — нет.



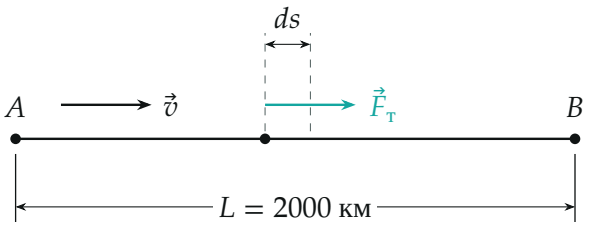
Четыре силы, действующие на самолёт, образуют замкнутый прямоугольник (рисунок для $K = 2$, чтобы был виден угол; в задаче $K = 20$ и прямоугольник в десять раз уже). Диагональ $\vec{R} = \vec{F}_п + \vec{F}_с$ — полная аэродинамическая сила.

3. Как это выглядит геометрически. Из $m\vec{g} + \vec{F}_т + \vec{R} = 0$ видно, что полная аэродинамическая сила $\vec{R}$ наклонена назад от вертикали на угол φ, причём $\tan\varphi = F_с/F_п = 1/K$. Горизонтальная составляющая этой силы — сопротивление, и тяга обязана её компенсировать: $\tan\varphi = F_т/mg$. Левая часть равна $1/K$, правая — искомое x. Двигатель по сути уравновешивает небольшой наклон полной аэродинамической силы.

Пункт 2.

4. Энергия за малый участок пути. Рассмотрим малый участок пути ds (рис.). Сила тяги направлена по перемещению, её работа $F_т\,ds$. Топливо массой $dm_т$ выделяет теплоту $q\,dm_т$, а доля η этой теплоты идёт на работу тяги (остальное уходит с газами и в нагрев двигателя):

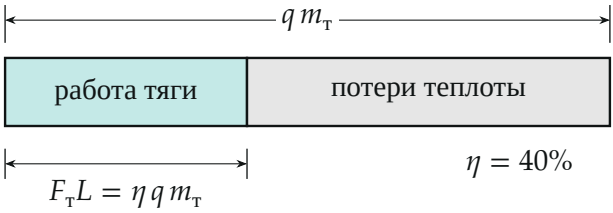
$$\eta\,q\,dm_т = F_т\,ds.$$



Маршрут AB длиной L и малый участок ds, на котором сила тяги совершает работу $F_m\,ds$.

5. Сумма по всему пути. Сила тяги по пункту 1 равна $F_т = mg/K$, а масса m почти не меняется (топлива сгорает мало), поэтому $F_т$ на всём пути одна и та же. Сложим уравнения всех участков от A до B, где $\sum ds = L$ и $\sum dm_т = m_т$:

$$\eta\, q\, m_т = F_т L = \frac{mgL}{K}.$$

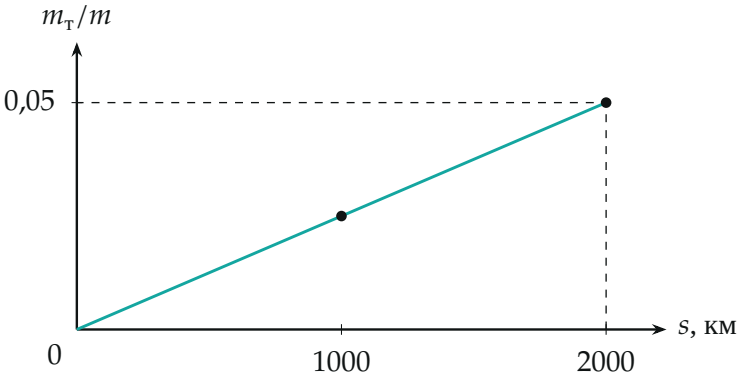


Теплота сгоревшего топлива делится: 40% идёт в работу тяги на пути L.

6. Доля топлива. Выразим $m_т$ и разделим на m: масса самолёта в уравнении сократилась, поэтому ответ от неё не зависит:

$$\alpha = \frac{m_т}{m} = \frac{gL}{K\eta q} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6}{20 \cdot 0{,}4 \cdot 5 \cdot 10^7} = 0{,}05.$$

Топлива уходит 5% массы самолёта — условие «масса топлива значительно меньше массы самолёта» выполнено, так что считать m и $F_т$ постоянными было законно.



Накопленная доля сожжённого топлива растёт с пройденным путём линейно, потому что сила тяги постоянна; к концу пути она равна $\alpha = 0{,}05$.

Обратите внимание. Работа тяги расходуется на преодоление сопротивления воздуха, а не на подъём: самолёт летит на постоянной высоте, и его потенциальная энергия не растёт. Подъём на $h \approx 10$ км потребовал бы дополнительно энергии порядка mgh, то есть около $hK/L = 10\%$ от $F_т L$; условие этого не учитывает ($K = 20$ дано «почти всё время полёта»), и ответ организаторов тоже.

Проверка. Размерность: в $gL/(K\eta q)$ числитель м/с^2 · м = м^2/с^2, знаменатель Дж/кг = м^2/с^2 — α безразмерна, как и $x = 1/K$.

Предел: при $K \to \infty$ (воздух не сопротивляется) $x \to 0$ и $\alpha \to 0$: тяги и топлива не нужно.

Ускорение: подъёмная сила mg пропорциональна v^2, поэтому при убыли массы на 5% скорость меняется примерно на 2,5%. При $v \sim 250$ м/с и времени полёта $L/v = 8000$ с это ускорение порядка $8 \cdot 10^{-4}$ м/с^2, а $F_с/m = g/K = 0{,}5$ м/с^2: допущение $\vec{a} \approx 0$ верно с точностью до 0,2%.

Уточнение: если учесть убыль массы ($dm_т/m = g\,ds/(K\eta q)$), получится $1 - e^{-0{,}05} = 0{,}049$ — те же 5%. Числа $x = \alpha = 0{,}05$ совпали случайно: $\alpha = x \cdot gL/(\eta q)$, а здесь $gL = \eta q$.

Смысл: двигатель совершает работу, как при подъёме самолёта на высоту $L/K = 100$ км, и на это уходит 5% его массы.

Ответ. 1) $x = \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$; 2) $\alpha = \dfrac{gL}{K\eta q} = 0{,}05$.