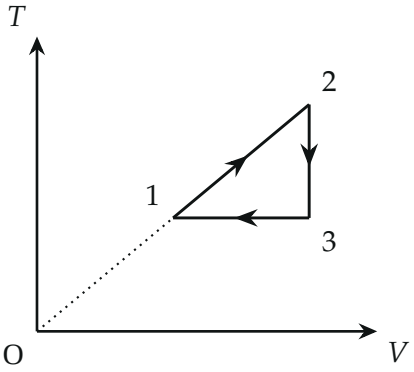
Цикл гелия на диаграмме T–V

Задача 2. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 2] На диаграмме зависимости температуры T газа от объёма V для гелия в количестве $\nu = 1$ моль показано, что сначала газ переводится из состояния с температурой $T_1 = 100$ К в процессе 1–2 прямо пропорциональной зависимости температуры от объёма, при этом объём газа увеличивается в 2 раза. Затем газ охлаждается до температуры $T_3 = T_1$ в изохорическом процессе 2–3. Далее в изотермическом процессе 3–1 газ переходит в начальное состояние, при этом внешнее давление совершает над газом работу $A_{31} = 576$ Дж.



1. Найти максимальную температуру газа в этом цикле.
2. Найти работу, совершенную газом в процессе 1–2.
3. Найти КПД цикла.

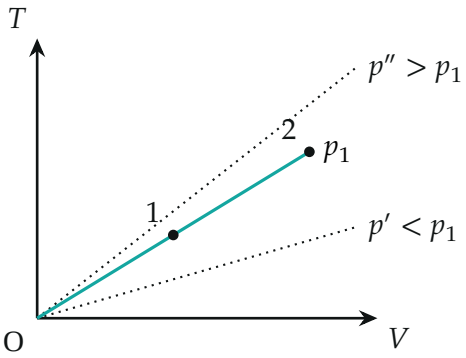
▲ **Решение.** **Что происходит.** Гелий — одноатомный идеальный газ: $U = \frac{3}{2}\nu RT$, $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$. Прямая 1–2 на диаграмме T–V продолжается в начало координат, значит $T = kV$, то есть давление $p = \nu RT/V = \nu Rk$ постоянно: 1–2 — изобарное расширение с нагревом. Дальше изохорное охлаждение 2–3 и изотермическое сжатие 3–1. Температура максимальна в вершине 2; работа на изобаре — $p\,\Delta V = \nu R\,\Delta T$; КПД цикла — работа за цикл, делённая на теплоту, которую газ получает от нагревателя (а получает он её только на участке 1–2).

Обозначения. p_1, V_1, T_1 — давление, объём и температура в состоянии 1. Все три состояния выразим через параметры состояния 1: 1 —

(p_1, V_1, T_1), 2 — $(p_1, 2V_1, 2T_1)$, 3 — $(p_1/2, 2V_1, T_1)$ (вывод ниже). A_{12} — работа газа на 1–2, Q_{12} — теплота, полученная газом на 1–2.

Пункт 1.

1. Какой это процесс. На рисунке продолжение прямой 1–2 проходит через начало координат, значит $T = kV$ с постоянным k. Из уравнения состояния $pV = \nu RT = \nu RkV$ получаем $p = \nu Rk = \text{const}$: на участке 1–2 давление постоянно. Если давление выше, прямая круче: $T = pV/(\nu R)$.



Изобары на диаграмме T–V — прямые, исходящие из начала координат; чем выше давление, тем круче прямая. Участок 1–2 лежит на изобаре давления p_1.

2. Температура в точке 2. Для изобары состояния 1 и 2 связаны отношением $T_2/T_1 = V_2/V_1$ (закон Гей-Люссака: делим $pV_2 = \nu RT_2$ на $pV_1 = \nu RT_1$). По условию $V_2 = 2V_1$, поэтому $T_2 = 2T_1 = 200$ К.

3. Где температура максимальна. На участке 1–2 температура растёт, на 2–3 падает до T_1, на 3–1 постоянна. Значит, наибольшая температура — в состоянии 2:

$$T_{\max} = T_2 = 2T_1 = 200 \text{ К}.$$

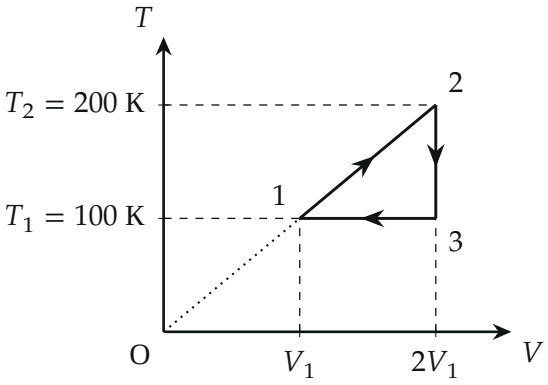


Диаграмма T–V с числами. Объём в точках 2 и 3 вдвое больше, чем в точке 1; температура в точках 1 и 3 одинакова.

Пункт 2.

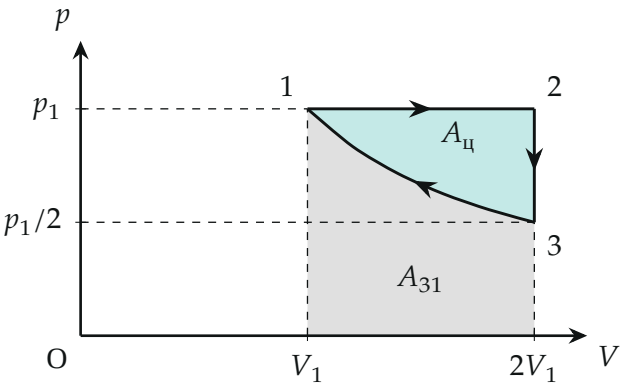
4. Работа на изобаре. Давление постоянно, поэтому работа газа равна $p_1(V_2 - V_1)$. Первый множитель выразим из уравнения состояния для состояния 1 ($p_1V_1 = \nu RT_1$):

$$A_{12} = p_1(2V_1 - V_1) = p_1V_1 = \nu RT_1 = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 100 \approx 831 \text{ Дж}.$$

Знак «плюс»: газ расширяется и сам совершает работу. На диаграмме p–V это площадь прямоугольника под изобарой 1–2 (рис.).

Пункт 3.

5. Три процесса в координатах p–V**.** Состояние 3 лежит на той же изотерме, что и состояние 1, при объёме $2V_1$: из $p_3 \cdot 2V_1 = p_1V_1$ получаем $p_3 = p_1/2$. Процесс 2–3 идёт при постоянном объёме, 3–1 — по гиперболе $pV = \text{const}$. Цикл обходится по часовой стрелке (верхняя ветвь 1–2 — расширение, нижняя 3–1 — сжатие), поэтому работа за цикл положительна.



Цикл в координатах p–V. Серая и бирюзовая области вместе — работа A_{12} на изобаре; серая — работа A_{31}, которую внешнее давление совершает над газом при сжатии 3–1; бирюзовая — работа газа за цикл $A_ц$.

6. Где газ получает и отдаёт теплоту. Запишем первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$ для каждого участка.

- 1–2: температура растёт, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) > 0$, и газ расширяется, $A_{12} > 0$, поэтому $Q_{12} > 0$ — газ получает теплоту.
- 2–3: объём не меняется, $A = 0$, температура падает, $\Delta U < 0$, поэтому $Q_{23} < 0$ — газ отдаёт теплоту.
- 3–1: температура постоянна, $\Delta U = 0$, газ сжимается, его работа $-A_{31} < 0$, поэтому $Q_{31} = -A_{31} < 0$ — газ отдаёт теплоту.

Получает теплоту газ только на участке 1–2:

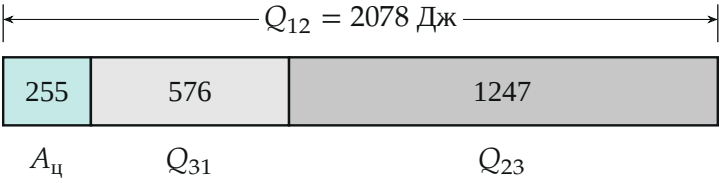
$$Q_{12} = \tfrac{3}{2}\nu RT_1 + \nu RT_1 = \tfrac{5}{2}\nu RT_1 = \nu C_p(T_2 - T_1) \approx 2078 \text{ Дж}.$$

7. Работа за цикл. Работа газа на 1–2 равна $+A_{12}$, на 2–3 равна нулю (объём постоянен), на 3–1 равна $-A_{31}$ (по условию внешнее давление совершает над газом положительную работу A_{31}). Поэтому

$$A_ц = A_{12} - A_{31} = \nu RT_1 - A_{31} \approx 831 - 576 = 255 \text{ Дж}.$$

8. КПД — отношение работы газа за цикл к полученной теплоте:

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_{12}} = \frac{\nu RT_1 - A_{31}}{\frac{5}{2}\nu RT_1} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{A_{31}}{\nu RT_1}\right) = 0{,}4\,(1 - 0{,}693) \approx 0{,}12.$$



Куда уходит полученная теплота Q_{12} (числа — в джоулях): $A_\text{ц}$ — полезная работа, Q_{31} и Q_{23} — теплота, отданная газом на участках 3–1 и 2–3.

9. Второй способ — баланс теплоты. За цикл внутренняя энергия возвращается к исходной, поэтому $Q_{12} - |Q_{23}| - |Q_{31}| = A_\text{ц}$. Здесь $|Q_{23}| = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu RT_1 \approx 1247$ Дж, $|Q_{31}| = A_{31} = 576$ Дж:

$$A_\text{ц} = 2078 - 1247 - 576 = 255 \text{ Дж},$$

как и в пункте 7.

Обратите внимание: в знаменателе КПД стоит теплота, полученная газом, то есть Q_{12}, а не работа A_{12}. На участке 1–2 теплота идёт не только на работу, но и на нагрев: $Q_{12} = \nu C_p \Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$, а не $\frac{3}{2}\nu R\Delta T$.

Обратите внимание: A_{31} в условии — работа внешних сил над газом (положительная). Работа самого газа на 3–1 равна $-A_{31}$.

Проверка. Размерность: νRT_1 — моль · Дж/(моль·К) · К = Дж, η безразмерен. Данные согласованы: на изотерме $A_{31} = \nu RT_1 \ln 2 \approx 576$ Дж, поэтому $\eta = \frac{2}{5}(1 - \ln 2) \approx 0{,}123$. Предел: без сжатия 3–1 КПД изобарного расширения был бы $A_{12}/Q_{12} = R/(\frac{5}{2}R) = \frac{2}{5}$; отдача теплоты на изотерме снижает его более чем втрое. Для тех же крайних температур $1 - T_1/T_2 = 0{,}5$, и $0{,}12 < 0{,}5$. Смысл: из 2,1 кДж полученной теплоты полезной работой становится 0,26 кДж.

Ответ. 1) $T_\text{max} = T_2 = 2T_1 = 200$ К; 2) $A_{12} = \nu RT_1 \approx 831$ Дж; 3) $\eta = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{A_{31}}{\nu RT_1}\right) \approx 0{,}12$.