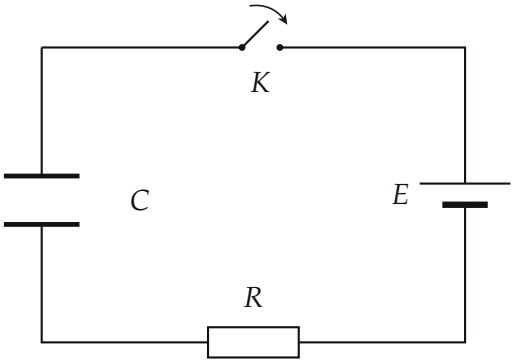
Зарядка конденсатора через резистор

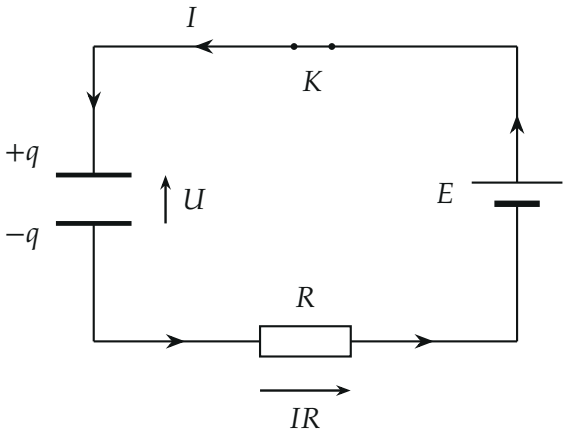
Задача 3. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 3] В электрической цепи (см. рис.) все элементы идеальные, их параметры указаны, конденсатор не заряжен. Ключ K замыкают.



1. Какой максимальный ток будет течь через резистор после замыкания ключа?
2. Найти максимальную скорость изменения энергии N_m конденсатора.
3. Найти напряжение на конденсаторе в момент, когда скорость изменения энергии конденсатора равна $5/9$ от максимальной скорости N_m.

▲ **Решение. Что происходит.** Это зарядка конденсатора через резистор. После замыкания ключа напряжение U на конденсаторе растёт от нуля до E, а ток $I = (E - U)/R$ убывает от E/R до нуля. Энергия конденсатора $W = CU^2/2$ растёт, а скорость её роста $N = dW/dt$ — это мощность, которую получает именно конденсатор. Нужно выразить N через U: получится парабола с нулями при $U = 0$ и $U = E$, поэтому любое значение N ниже максимума достигается дважды.

Обозначения. U — напряжение на конденсаторе в произвольный момент, I — ток в цепи (цепь неразветвлённая, ток один и тот же в резисторе и на пластинах), $q = CU$ — заряд конденсатора, $W = CU^2/2$ — его энергия.



Ток течёт против часовой стрелки: от положительной пластины источника через ключ на верхнюю пластину конденсатора и от нижней пластины через резистор обратно к источнику. Стрелки U и IR указывают, откуда куда напряжение растёт.

Пункт 1.

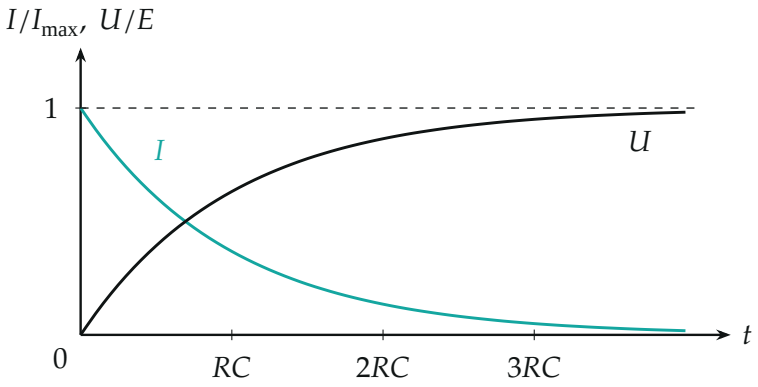
1. Закон Ома для замкнутой цепи (второй закон Кирхгофа). Обойдём контур по току: ЭДС источника равна сумме напряжений на конденсаторе и на резисторе, так как других элементов с сопротивлением нет:

$$E = U + IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E - U}{R}.$$

Чем сильнее заряжен конденсатор, тем меньше ток.

2. Качественная картина. Пока U мало, ток велик и конденсатор заряжается быстро; по мере роста U ток падает, и зарядка замедляется (рис.). Ток наибольший в самый первый момент, когда U минимально. Конденсатор не заряжен, $U = 0$, и заряд мгновенно измениться не может: для скачка заряда нужен бесконечный ток, а он ограничен сопротивлением R. Поэтому в момент замыкания $U = 0$ и

$$I_{\max} = \frac{E}{R}.$$



Зарядка конденсатора: ток I (бирюзовая кривая) убывает от E/R, напряжение U растёт от нуля до E; время — в единицах RC.

Пункт 2.

3. Скорость изменения энергии. Энергия конденсатора $W = CU^2/2$, его ток зарядки $I = dq/dt = C\,dU/dt$. Тогда

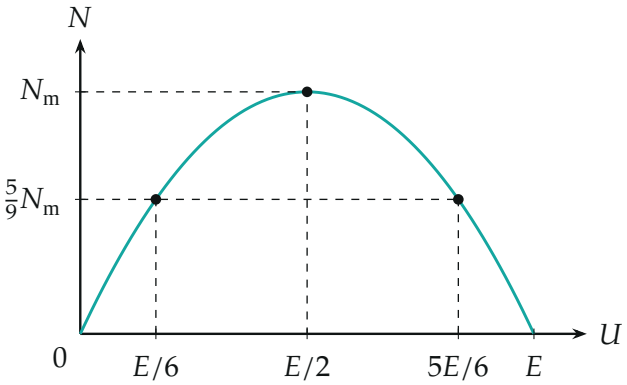
$$N = \frac{dW}{dt} = CU\frac{dU}{dt} = U\,I.$$

Подставим I из пункта 1 — мощность выражена только через U:

$$N = \frac{U(E-U)}{R} = -\frac{U^2}{R} + \frac{E}{R}U.$$

4. Максимум. Это парабола ветвями вниз с нулями $U = 0$ и $U = E$, максимум — посередине, при $U = E/2$:

$$N_\text{m} = \frac{(E/2)(E/2)}{R} = \frac{E^2}{4R}.$$



Зависимость $N(U)$: парабола с максимумом $E^2/(4R)$ при $U = E/2$; уровень $\frac{5}{9}N_m$ пересекает её в двух точках.

5. Второй способ — баланс мощностей. Источник отдаёт мощность EI, резистор расходует I^2R, остальное получает конденсатор: $N = EI - I^2R$. Как функция тока это парабола с максимумом при $I = E/(2R)$ — как при подборе нагрузки к источнику: максимум достигается, когда на резисторе падает половина ЭДС, $IR = E/2$, то есть $U = E/2$. Получаем $N_m = E \cdot \dfrac{E}{2R} - \dfrac{E^2}{4R} = \dfrac{E^2}{4R}$, как и в пункте 4.

Пункт 3.

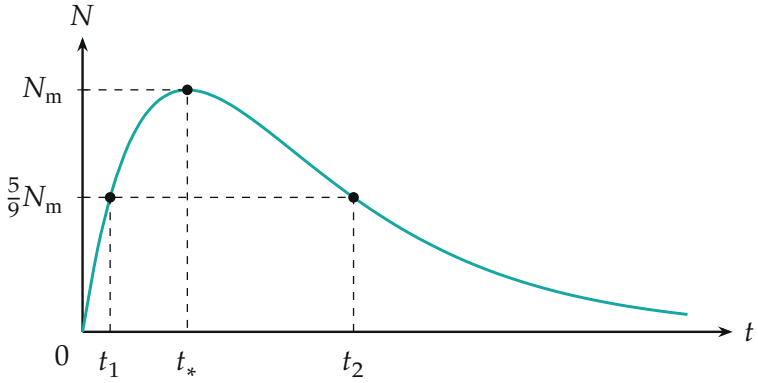
6. Условие. Пусть $N = \frac{5}{9}N_m$. Подставим выражение для N и сократим на E^2/R:

$$\frac{U(E-U)}{R} = \frac{5}{9}\cdot\frac{E^2}{4R} \quad\Rightarrow\quad 36\,U^2 - 36\,EU + 5E^2 = 0.$$

7. Корни. Дискриминант $36^2E^2 - 4\cdot 36\cdot 5E^2 = 576E^2$, корень равен $24E$:

$$U = \frac{36E \pm 24E}{72} \quad\Rightarrow\quad U_1 = \frac{E}{6}, \qquad U_2 = \frac{5E}{6}.$$

Оба значения принадлежат промежутку $0 < U < E$, поэтому подходят оба: при зарядке напряжение сначала проходит $E/6$ (энергия растёт всё быстрее), затем $E/2$ (быстрее всего), затем $5E/6$ (темп роста уже спадает). Условие выполняется дважды — на росте и на спаде $N(t)$.



Зависимость $N(t)$: $U = E(1-e^{-t/RC})$, *поэтому* $N = \dfrac{E^2}{R}e^{-t/RC}\left(1-e^{-t/RC}\right)$. *Максимум в момент* $t_* = RC\ln 2$, *где* $U = E/2$; *уровень* $\frac{5}{9}N_m$ *достигается в моменты* $t_1 = RC\ln\frac{6}{5} \approx 0{,}18\,RC$ ($U = E/6$) *и* $t_2 = RC\ln 6 \approx 1{,}79\,RC$ ($U = 5E/6$).

Обратите внимание: скорость изменения энергии конденсатора $N = UI$ — не мощность источника EI: часть мощности, I^2R, выделяется на резисторе в виде теплоты.

Обратите внимание: в пункте 3 нельзя отбрасывать один из корней: задача спрашивает напряжение «в момент, когда» $N = \frac{5}{9}N_m$, а таких моментов два.

Проверка. Размерность: E^2/R — $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$, напряжения $E/6$ и $5E/6$ — вольты. Пределы: $N = 0$ при $U = 0$ (конденсатору нечего принимать — напряжение нулевое) и при $U = E$ (ток прекратился). Корни симметричны относительно $E/2$: сумма $U_1 + U_2 = E$, как у любой параболы с осью $U = E/2$. Энергетический контроль: $\int_0^\infty N\,dt = \dfrac{E^2}{R}\left(RC - \dfrac{RC}{2}\right) = \dfrac{CE^2}{2}$ — конденсатор получил ровно свою конечную энергию. Смысл: темп роста энергии конденсатора наибольший, когда напряжение источника делится поровну между конденсатором и резистором; он вчетверо меньше максимально возможной мощности источника E^2/R.

Ответ. 1) $I_{max} = \dfrac{E}{R}$; 2) $N_m = \dfrac{E^2}{4R}$; 3) $U_1 = \dfrac{E}{6}$ или $U_2 = \dfrac{5E}{6}$ (первый и второй моменты, когда $N = \frac{5}{9}N_m$).