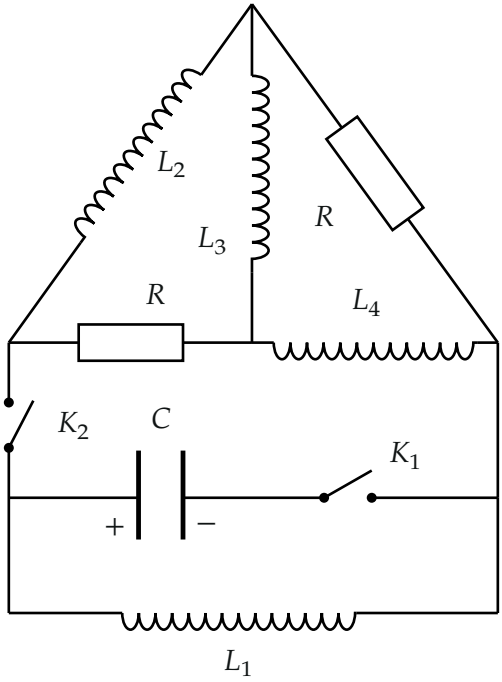
Колебания в цепи с четырьмя катушками и двумя ключами

Задача 4. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 4] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны, причём $L_1 = L$, $L_2 = 2L$, $L_3 = 3L$, $L_4 = 4L$. Конденсатор ёмкостью C заряжен до напряжения U_0, ключи разомкнуты, режим в цепи установился. Ключ K_1 замыкают. Когда напряжение на конденсаторе C уменьшается в 3 раза, замыкают ключ K_2.



1. Найти ток I_0 через L_1 непосредственно перед замыканием ключа K_2.
2. Найти напряжение на конденсаторе C в установившемся режиме после замыкания ключа K_2.
3. Какое количество теплоты выделится в цепи после замыкания ключа K_2?

▲ **Решение. Что происходит.** Процесс идёт в два этапа. Пока K_2 разомкнут, ток есть только в колебательном контуре из конденсатора и катушки L_1: остальная часть схемы подключена лишь одним проводом и тока не несёт. Когда замыкают K_2, к L_1 присоединяется цепочка катушек L_2, L_3, L_4 с резисторами.

Ключевая идея — замкнутый контур L_1–K_2–L_2–L_3–L_4: в нём нет ни конденсатора, ни резисторов, поэтому сумма «индуктивность × ток» по этому контуру остаётся неизменной (как магнитный поток в сверхпроводящем кольце), а резисторы гасят колебания и забирают лишнюю энергию.

Класс задачи — переходный процесс с катушками: закон сохранения энергии плюс сохранение суммарного потока в контуре без сопротивления.

Обозначения. I_0 — ток через L_1 перед замыканием K_2; I_1 — установившийся ток в контуре из катушек; Q — выделившаяся теплота. Резисторы R есть на рисунке, но их сопротивление не задано: ответ от него не зависит (проверено численно ниже).

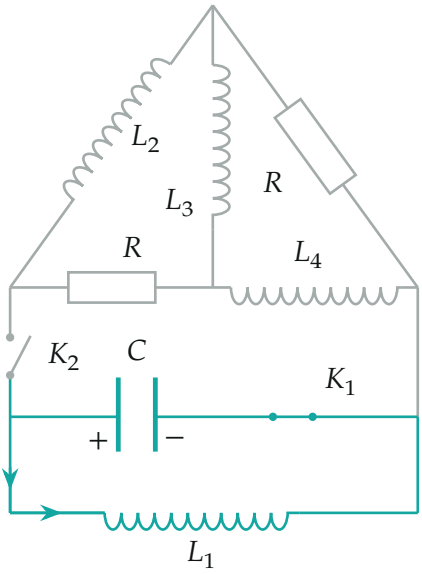
Пункт 1.

1. Контур на первом этапе. При замкнутом K_1 и разомкнутом K_2 замкнутый путь для тока один: конденсатор C — ключ K_1 — катушка L_1 (рисунок ниже). Резисторов в нём нет, поэтому энергия контура сохраняется.

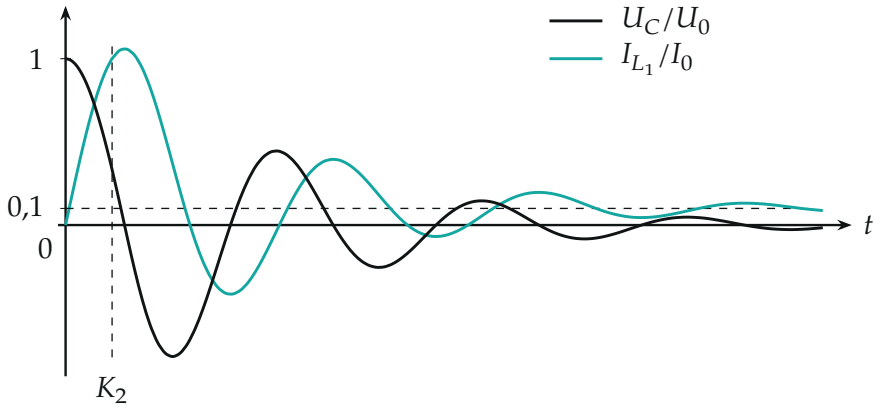
2. Закон сохранения энергии для контура. Сравним начальное состояние (конденсатор заряжен до U_0, тока нет) и момент перед замыканием K_2 (напряжение $U_0/3$, ток I_0):

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\frac{U_0}{3}\right)^2 + \frac{LI_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{CU_0^2}{L}} = \frac{2}{3}U_0\sqrt{\frac{2C}{L}}.$$

Знак: ток течёт так, что конденсатор разряжается через катушку.



Первый этап: K_1 замкнут, K_2 разомкнут. Ток (бирюзовые провода) идёт по контуру C–K_1–L_1; серая часть схемы тока не несёт. Напряжение на конденсаторе перед замыканием K_2 равно $U_0/3$.



Напряжение на конденсаторе и ток через L_1 (в единицах U_0 и I_0) до замыкания K_2 (гармонические cos *и* sin*) и после (численный расчёт при $R = 2\sqrt{L/C}$; время в единицах $\sqrt{LC}$). Колебания гаснут, $U_C \to 0$, $I_{L_1} \to I_1 = I_0/10$ (пунктир).*

Пункт 2.

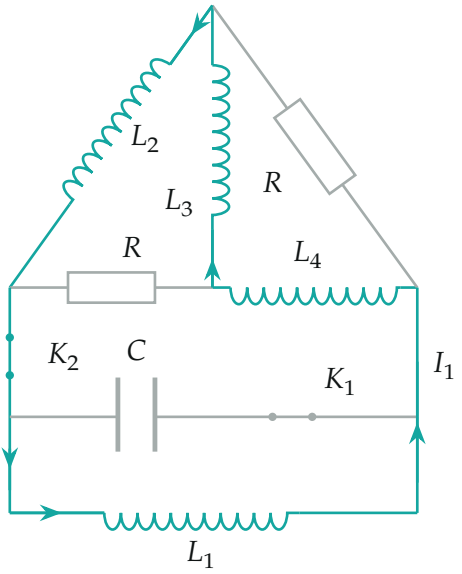
3. Установившийся режим. Режим установился — значит, все токи постоянны. Для катушки $\mathcal{E}_L = -L\,dI/dt = 0$, поэтому напряжение на каждой катушке равно нулю. Конденсатор подключён к тем же двум узлам, что и катушка L_1 (параллельно ей), поэтому его напряжение равно напряжению на L_1:

$$U_C = 0.$$

Колебания к этому моменту погашены резисторами, электрической энергии в конденсаторе не осталось.

Пункт 3.

4. Токи в установившемся режиме. Напряжения на катушках нулевые, поэтому на резисторах напряжения тоже нет (каждый из них включён между теми же узлами, что и участок из катушек), и тока в них нет; в конденсаторе тока тоже нет. Значит, ток течёт только по контуру из катушек и во всех четырёх одинаков по модулю: обозначим его I_1 (рис.).



Установившийся режим после замыкания K_2: ток I_1 течёт по контуру из катушек L_1, L_2, L_3, L_4 (бирюзовые провода); резисторы и конденсатор (серые) тока не несут, $U_C = 0$.

5. Сохранение суммарного потока. Запишем второй закон Кирхгофа для замкнутого контура L_1–K_2–L_2–L_3–L_4. Он проходит только через катушки, поэтому в любой момент сумма ЭДС самоиндукции равна нулю, а ток I_k в k-й катушке считаем положительным, если он течёт в обходе контура по направлению тока I_0 в L_1:

$$L\frac{dI_{(1)}}{dt} + 2L\frac{dI_{(2)}}{dt} + 3L\frac{dI_{(3)}}{dt} + 4L\frac{dI_{(4)}}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \quad LI_{(1)} + 2LI_{(2)} + 3LI_{(3)} + 4LI_{(4)} = \text{const}.$$

Токи в L_2, L_3, L_4 по отдельности пока идёт процесс могут быть разными (резисторы их перераспределяют), сохраняется именно эта комбинация. Перед замыканием K_2 ток есть только в L_1 ($I_{(1)} = I_0$, остальные равны нулю), в конце токи равны I_1:

$$10\,LI_1 = LI_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{I_0}{10}.$$

6. Закон сохранения энергии. Теплота выделяется только в резисторах (у остальных элементов сопротивления нет). Энергия в момент замыкания K_2 равна $\dfrac{C}{2}\left(\dfrac{U_0}{3}\right)^2 + \dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{CU_0^2}{2}$ (до замыкания K_2 теплоты не выделялось). В конце электрической энергии нет, а магнитная энергия четырёх катушек с током I_1 равна $\dfrac{1}{2}(L + 2L + 3L + 4L)I_1^2 = 5LI_1^2$. Разница ушла в теплоту:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 5LI_1^2 = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{LI_0^2}{20} = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{1}{20}\cdot\frac{8}{9}CU_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{45}\right)CU_0^2 = \frac{41}{90}CU_0^2.$$

Знак: $Q > 0$, энергия перешла в тепло резисторов.



Баланс энергии (числа — в единицах $CU_0^2/90$, сумма равна 45): энергия конденсатора W_C и катушки L_1 перед замыканием K_2, затем теплота Q и магнитная энергия четырёх катушек $W_м$.

Проверка. Размерность: $LI_0^2 \sim CU_0^2$ — энергия, $U_0\sqrt{C/L}$ — ток. Предел: если бы катушек L_2, L_3, L_4 не было, получилось бы $I_1 = I_0$ и $Q = \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{18}CU_0^2$ — ровно энергия конденсатора в момент замыкания, как и должно быть при коротком замыкании конденсатора. Всегда $0 < Q < \frac{1}{2}CU_0^2$: $\frac{41}{90} < \frac{45}{90}$. Численный контроль: уравнения цепи (с токами во всех катушках и напряжением на конденсаторе) при $R = 0{,}3;\ 1;\ 3\ \sqrt{L/C}$ дают $I_1 = I_0/10$, $U_C \to 0$ и $Q = 0{,}4556\,CU_0^2 = \frac{41}{90}CU_0^2$ при любом R. Смысл: большая часть энергии, 41 из 45 долей, уходит в резисторы, а в магнитном поле остаётся лишь около 9%.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{2}{3}\,U_0\sqrt{\dfrac{2C}{L}}$; 2) $U_C = 0$; 3) $Q = \dfrac{41}{90}\,CU_0^2$.