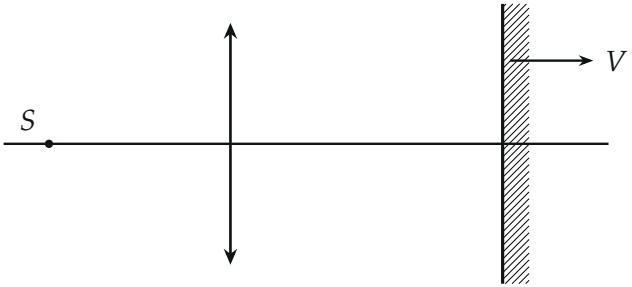
Собирающая линза и движущееся плоское зеркало

Задача 5. [Физтех 2018/19, 11 класс, задача 5] На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 16$ см находится муха S на расстоянии $d_1 = 24$ см от линзы (см. рис.). По другую сторону линзы находится плоское зеркало, перемещающееся вдоль главной оптической оси линзы со скоростью $V = 1$ мм/с. В некоторый момент времени t_0 зеркало было на расстоянии $L = 36$ см от линзы.



1. На каком расстоянии от линзы получится изображение мухи при отсутствии зеркала?
2. На каком расстоянии от линзы получится изображение мухи в момент времени t_0 в системе линза–зеркало?
3. С какой скоростью движется изображение мухи в момент времени t_0 в системе линза–зеркало?

▲ **Решение. Что происходит.** Свет от мухи проходит линзу, отражается от зеркала и возвращается через ту же линзу. Каждый элемент строит изображение, которое служит предметом для следующего: $S \to$ линза $\to S_1^* \to$ зеркало $\to S_2^* \to$ линза $\to S_3^*$. Все точки лежат на главной оптической оси. Положение S_3^* зависит от положения зеркала L, поэтому скорость изображения — это производная по времени, а при пересчёте скорости предмета в скорость изображения работает продольное увеличение Γ^2.

Обозначения. Ось x — по главной оптической оси от линзы к зеркалу; зеркало движется по рисунку вправо, от линзы. d — расстояние от

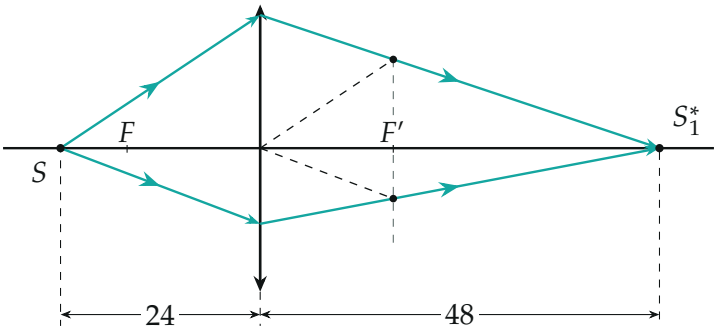
предмета до линзы, f — от изображения до линзы, $\Gamma = f/d$ — увеличение; формула тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ (для действительных предмета и изображения). S_1^* — изображение мухи в линзе, S_2^* — изображение S_1^* в зеркале, S_3^* — изображение S_2^* в линзе: оно и есть изображение мухи в системе линза–зеркало. Расстояния — в сантиметрах.

Пункт 1.

1. Формула линзы. Муха стоит дальше фокуса ($d_1 = 24 > F = 16$), поэтому изображение действительное и лежит по другую сторону линзы:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F} = \frac{24 \cdot 16}{24 - 16} = 48 \text{ см}.$$

Построение (рис.): лучи идут от S к линзе; луч, идущий от S в точку на линзе на высоте h, после линзы проходит через точку фокальной плоскости, куда попал бы луч, параллельный ему и проходящий через центр линзы (побочный фокус). Два таких луча пересекаются в S_1^* на расстоянии 48 см справа от линзы.



Изображение мухи в линзе без зеркала: два луча из S сходятся в S_1^*, $f_1 = 48$ см. Пунктир — вспомогательные лучи через центр линзы; они дают побочные фокусы на фокальной плоскости (штриховая вертикаль). Размеры — в сантиметрах.

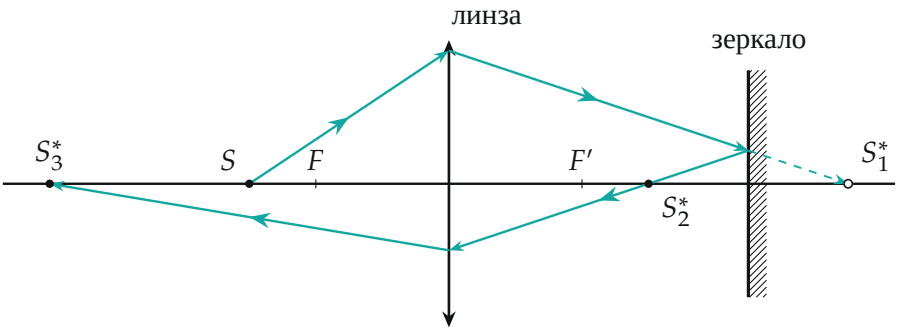
Пункт 2.

2. Предмет для зеркала. Зеркало стоит на $L = 36$ см от линзы, ближе, чем $f_1 = 48$ см. Лучи после линзы падают на зеркало ещё сходящимся

пучком, не успев собраться в S_1^*: точка S_1^* оказывается за зеркалом, на расстоянии $48 - 36 = 12$ см от него. Для зеркала это мнимый предмет.

3. Изображение в плоском зеркале. Плоское зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала. Поэтому S_2^* лежит на таком же расстоянии 12 см от зеркала, но перед ним (по эту же сторону, что и линза). Отражённые лучи в S_2^* действительно сходятся, изображение действительное. Расстояние от линзы до него

$$d_2 = L - 12 = 36 - 12 = 24 \text{ см} \qquad (\, d_2 = 2L - f_1 \,).$$

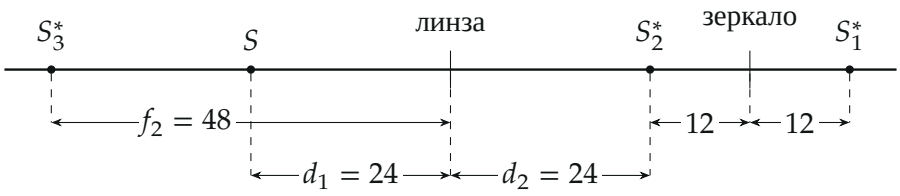


Ход луча в системе: от S к линзе, к зеркалу (пунктир — продолжение за зеркало до мнимого предмета S_1^*), отражение, через S_2^* снова к линзе и в S_3^* слева от неё. Изображение точки, лежащей на оси, тоже лежит на оси, поэтому одного луча достаточно.

4. Изображение в линзе. Теперь свет идёт справа налево. Предмет S_2^* стоит на $d_2 = 24$ см от линзы, дальше фокуса, поэтому изображение действительное, по ту же сторону от линзы, где муха (слева):

$$f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = \frac{24 \cdot 16}{24 - 16} = 48 \text{ см}.$$

Изображение S_3^* получается слева от линзы на 48 см — в другой точке, чем сама муха (24 см слева).



Положения точек на оси (в масштабе, размеры в сантиметрах): S_2^* и S_1^* симметричны относительно зеркала, а S_3^* и S лежат с одной стороны от линзы.

Пункт 3.

5. Как движутся изображения. Муха, линза и изображение S_1^* неподвижны. Зеркало сдвигается со скоростью V вправо. Точка S_2^* симметрична неподвижной S_1^* относительно зеркала: её координата $x_2 = 2L - f_1$, поэтому S_2^* движется в ту же сторону вдвое быстрее зеркала со скоростью $2V$, и d_2 растёт со скоростью $\dot{d}_2 = 2V$.

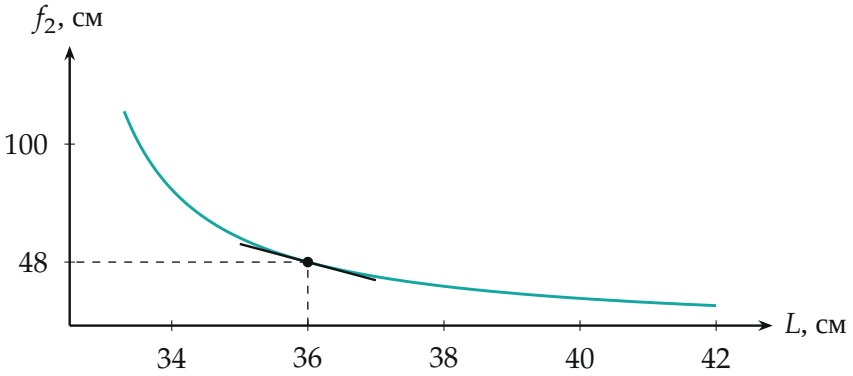
6. Продольное увеличение. Продифференцируем формулу линзы $\dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{F}$ по времени (F постоянно):

$$-\frac{\dot{d}_2}{d_2^2} - \frac{\dot{f}_2}{f_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_2 = -\left(\frac{f_2}{d_2}\right)^2 \dot{d}_2 = -\Gamma^2 \dot{d}_2.$$

При $f_2 = 48$ см, $d_2 = 24$ см увеличение $\Gamma = f_2/d_2 = 2$, $\Gamma^2 = 4$:

$$\dot{f}_2 = -4 \cdot 2V = -8V, \qquad u = |\dot{f}_2| = 8V = 8 \text{ мм/с}.$$

Знак минус: расстояние f_2 уменьшается, изображение S_3^* приближается к линзе, то есть движется вправо — в ту же сторону, что и зеркало.



Положение изображения f_2 в зависимости от положения зеркала L ($f_2 = \dfrac{d_2F}{d_2-F}$, $d_2 = 2L - 48$). Чёрная прямая — касательная в точке $L = 36$ см, $f_2 = 48$ см; её наклон $df_2/dL = -8$, поэтому $u = 8V$. При $L \to 32$ см ($d_2 \to F$) $f_2 \to \infty$.

7. Второй способ — прямой пересчёт. Сдвинем зеркало на $\Delta L = V\,\Delta t = 0{,}01$ см (за $\Delta t = 0{,}1$ с). Тогда $d_2 = 2\cdot 36{,}01 - 48 = 24{,}02$ см и $f_2 = \dfrac{24{,}02\cdot 16}{24{,}02-16} \approx 47{,}920$ см. Изображение сместилось на $\Delta f_2 = -0{,}0798$ см за 0,1 с, то есть со скоростью ≈ 8 мм/с, как и по производной.

Обратите внимание: в пункте 2 изображение S_1^* лежит за зеркалом: предмет для зеркала мнимый, а изображение в зеркале получилось действительным. Это бывает, только когда на зеркало падает сходящийся пучок.

Проверка. Размерность: u/V и $\Gamma^2 = (f/d)^2$ безразмерны. Предел: при $d_2 = 2F = 32$ см (зеркало на $L = 40$ см) $f_2 = 32$ см, $\Gamma = 1$ и $u = 2V$: предмет и изображение в двойном фокусе движутся с равной скоростью, а скорость S_2^* равна $2V$. Положение S_3^* получено и по формуле линзы, и построением луча (рис.) — совпало. Смысл: изображение быстрее зеркала в 8 раз: двойное отражение даёт ×2, продольное увеличение линзы — $\times\Gamma^2 = 4$.

Ответ. 1) $f_1 = 48$ см; 2) $f_2 = 48$ см (слева от линзы); 3) $u = 8V = 8$ мм/с.