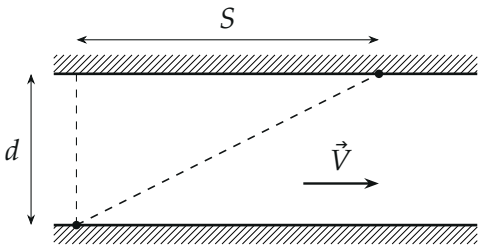
Переправа через реку за наименьшее время

Задача 1. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 1] Пловец переплывает через реку шириной $d = 100$ м за наименьшее время $\tau = 100$ с. За это время течение сносит его на $S = 200$ м. Снос — это расстояние, на которое сместится пловец вдоль реки к моменту достижения противоположного берега. В подвижной системе отсчёта, связанной с водой, пловец движется с постоянной скоростью.

1. Найдите скорость V течения реки.
2. Найдите скорость u пловца в подвижной системе отсчёта, связанной с водой.
3. Найдите продолжительность T заплыва, в котором снос будет минимальным.



Поясняющий рисунок: пловец стартует с нижнего берега и выходит на верхний ниже по течению на S.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сложение скоростей: скорость пловца относительно берега $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$, где $\vec{u}$ — его скорость относительно воды, $\vec{V}$ — скорость течения. Поперёк реки пловца несёт только составляющая $\vec{u}$, перпендикулярная берегу; течение поперёк ничего не даёт. Отсюда быстрее всего переплыть, если $\vec{u}$ направить прямо поперёк. Меньше всего снесёт, если направление скорости $\vec{v}$ относительно берега будет как можно круче к течению.

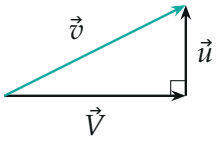
Обозначения. Ось x — вдоль берега по течению, ось y — поперёк реки к противоположному берегу. $\vec{u}$ — скорость пловца относительно воды, $\vec{V}$ — скорость течения, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ — скорость пловца относительно берега, α — угол между $\vec{v}$ и $\vec{V}$.

Пункт 1 и пункт 2.

1. Самый быстрый заплыв. Проекция на ось y закона сложения скоростей: $v_y = u_y$, ведь $\vec{V}$ направлена вдоль x. Время переправы

$$t = \frac{d}{u_y}.$$

Модуль u постоянен, поэтому t наименьшее, когда $u_y = u$, то есть $\vec{u}$ перпендикулярна берегу. Тогда $u_x = 0$, и вдоль реки пловца несёт только течение.



Треугольник скоростей при самом быстром заплыве: $\vec{u} \perp \vec{V}$. Длины — в масштабе ответа: $V = 2$ м/с, $u = 1$ м/с.

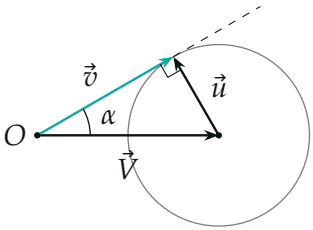
2. Проекции перемещения. За время τ поперёк реки пловец проходит d со скоростью u, вдоль — S со скоростью V:

$$d = u\tau, \qquad S = V\tau,$$

$$V = \frac{S}{\tau} = \frac{200}{100} = 2 \text{ м/с}, \qquad u = \frac{d}{\tau} = \frac{100}{100} = 1 \text{ м/с}.$$

Пункт 3.

3. Где кончается вектор $\vec{v}$. Пловец движется по прямой вдоль $\vec{v}$, и снос равен $x = d \operatorname{ctg} \alpha$: чем больше угол α между $\vec{v}$ и течением, тем меньше снос. Отложим $\vec{V}$ от точки O, а $\vec{u}$ — от конца $\vec{V}$. Направление $\vec{u}$ пловец выбирает сам, модуль фиксирован, поэтому конец $\vec{v}$ лежит на окружности радиуса u с центром в конце вектора $\vec{V}$. Здесь $u < V$: точка O вне окружности, и прямо поперёк реки плыть нельзя — сносить будет обязательно.



Конец вектора $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ лежит на окружности радиуса u. Наибольший угол α — у касательной: тогда $\vec{v} \perp \vec{u}$.

4. Наибольший угол. Угол α наибольший, когда $\vec{v}$ касается окружности; радиус в точку касания перпендикулярен касательной, значит, $\vec{v} \perp \vec{u}$. Из прямоугольного треугольника скоростей с гипотенузой V:

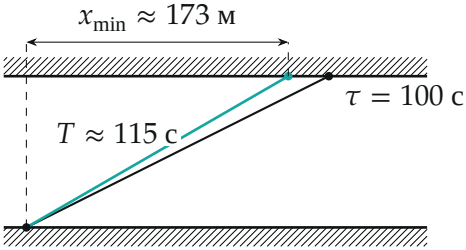
$$\sin\alpha = \frac{u}{V} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 30^\circ.$$

Вектор $\vec{u}$ при этом направлен против течения под углом α к перпендикуляру к берегу.

5. Время заплыва. Проекция $\vec{v}$ на ось y по-прежнему равна $u_y = u\cos\alpha$ (угол между $\vec{u}$ и осью y равен α, стороны углов взаимно перпендикулярны):

$$T = \frac{d}{u\cos\alpha} = \frac{100}{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115 \text{ с}.$$

Снос в этом заплыве $x_{\min} = d\operatorname{ctg}\alpha = 100\sqrt{3} \approx 173$ м — меньше, чем $S = 200$ м, но заплыв дольше.



Два заплыва в масштабе: чёрный — самый быстрый (снос 200 м), бирюзовый — с наименьшим сносом.

Обратите внимание. Наименьший снос *не* получается, если направить $\vec{u}$ прямо против течения или прямо поперёк: оптимум — при $\vec{u} \perp \vec{v}$, и только потому, что $u < V$. Будь $u > V$, пловца можно было бы направить так, чтобы снос стал нулевым.

Ответ:

$$V = \frac{S}{\tau} = 2 \text{ м/с}, \qquad u = \frac{d}{\tau} = 1 \text{ м/с},$$

$$T = \frac{d}{u\sqrt{1 - u^2/V^2}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \text{ с} \approx 115 \text{ с}.$$

Проверка. Размерность T: м/(м/с) = с. Предел $u \ll V$: $T \to d/u$ — пловец всё равно плывёт почти поперёк воды. Второй способ для пункта 3: снос при угле φ между $\vec{u}$ и перпендикуляром (против течения) равен $x(\varphi) = d\,\dfrac{V - u\sin\varphi}{u\cos\varphi}$; его минимум (численно) при $\sin\varphi = u/V = 0{,}5$, $x_{\min} = 173$ м, $T = 115$ с — то же.

Смысл: быстрее всего плыть поперёк воды, меньше всего снесёт, если плыть перпендикулярно своей итоговой скорости.

Ответ. 1) $V = \dfrac{S}{\tau} = 2$ м/с; 2) $u = \dfrac{d}{\tau} = 1$ м/с; 3) $T = \dfrac{200}{\sqrt{3}} \approx 115$ с.