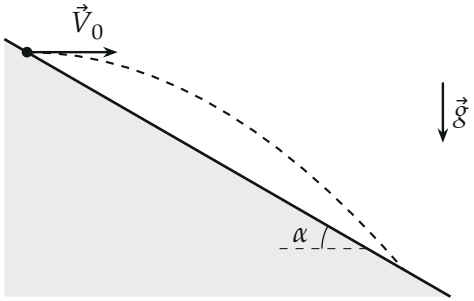
Мяч, брошенный горизонтально вниз по склону

Задача 2. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 2] Плоский склон холма образует угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Мяч, брошенный с поверхности склона в горизонтальном направлении «вниз» по склону, через $\tau = 0{,}5$ с движется со скоростью $V_1 = 13$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

1. Найдите начальную скорость V_0 мяча.
2. Через какое время t_1 после старта мяч находился на максимальном расстоянии от поверхности склона?
3. На каком максимальном расстоянии H от поверхности склона находился мяч в этот момент?



Поясняющий рисунок: мяч брошен горизонтально с поверхности склона; пунктир — его траектория (в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит с постоянным ускорением $\vec{g}$ — это баллистика. Для пункта 1 удобно векторное равенство $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. Для пунктов 2 и 3 нужно расстояние до склона, поэтому оси поворачиваем вдоль склона и перпендикулярно ему: тогда расстояние до склона — это просто координата y, а движение вдоль y — бросок вверх с постоянным замедлением.

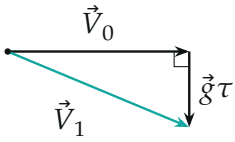
Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх, начало — в точке броска. $\vec{V}_0$ — начальная скорость, $\vec{V}_1$ — скорость через время τ.

Пункт 1.

1. Закон изменения скорости при постоянном ускорении:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{g}\tau.$$

Вектор $\vec{V}_0$ горизонтален, $\vec{g}\tau$ вертикален, значит, они перпендикулярны, и $\vec{V}_1$ — гипотенуза прямоугольного треугольника.



Треугольник скоростей в масштабе: $V_0 = 12$, $g\tau = 5$, $V_1 = 13$ *м/с.*

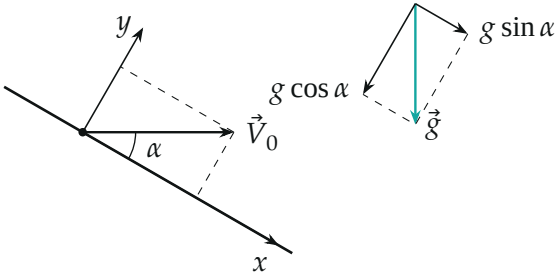
По теореме Пифагора

$$V_0 = \sqrt{V_1^2 - (g\tau)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

2. Проекции на повёрнутые оси. Склон наклонён на α, поэтому горизонтальная $\vec{V}_0$ образует со склоном угол α и смотрит от склона; вертикальное $\vec{g}$ образует угол α с нормалью к склону. Проекции:

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha, \quad V_{0y} = V_0 \sin\alpha; \qquad g_x = g\sin\alpha, \quad g_y = -g\cos\alpha.$$



Повёрнутые оси: x вдоль склона, y по нормали. Пунктиры — проекции $\vec{V}_0$ на оси; бирюзовая $\vec{g}$ раскладывается на $g\sin\alpha$ вдоль склона и $g\cos\alpha$ к склону.

3. Когда мяч дальше всего от склона. Расстояние до склона равно координате y. Она растёт, пока $V_y > 0$, и убывает, когда $V_y < 0$; наибольшая — при $V_y = 0$, то есть когда скорость мяча *параллельна* склону. Закон изменения проекции скорости:

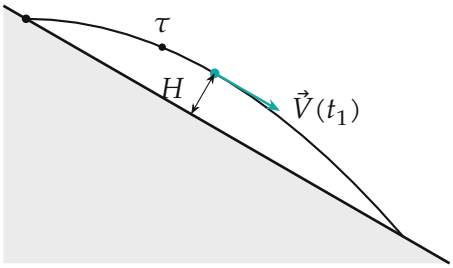
$$V_y = V_0 \sin\alpha - g\cos\alpha \cdot t = 0,$$

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{V_0 \operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{12}{10\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}69 \text{ с}.$$

Пункт 3.

4. Наибольшее расстояние. Вдоль оси y — равнозамедленное движение от $V_0 \sin\alpha$ до нуля с ускорением $g\cos\alpha$. Формула пути без времени:

$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g\cos\alpha} = \frac{6^2}{2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}1 \text{ м}.$$



Траектория в масштабе. В момент t_1 (бирюзовая точка) скорость параллельна склону, и мяч дальше всего от него. Точка τ — момент из условия: мяч ещё в полёте.

Обратите внимание. Наибольшее расстояние до склона — когда скорость параллельна склону, а не перпендикулярна ему. И мяч к моменту $\tau = 0{,}5$ с ещё не упал: полёт длится $2t_1 \approx 1{,}4$ с, значит, данные V_1 относятся к полёту, и пункт 1 решён верно.

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{V_1^2 - g^2\tau^2} = 12 \text{ м/с}, \qquad t_1 = \frac{V_0 \operatorname{tg}\alpha}{g} \approx 0{,}69 \text{ с},$$

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g\cos\alpha} \approx 2{,}1 \text{ м}.$$

Проверка. Размерности: $\frac{\text{м/с}}{\text{м/с}^2} = \text{с}$, $\frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}$. Второй способ для t_1: в лабораторных осях скорость параллельна склону, когда $\frac{gt_1}{V_0} = \operatorname{tg}\alpha$ — то же t_1. Второй способ для H: точка $(V_0 t_1, -\frac{gt_1^2}{2}) = (8{,}31; -2{,}40)$ м, расстояние от неё до прямой склона $y = -x\operatorname{tg}\alpha$ равно $(8{,}31\sin\alpha - 2{,}40\cos\alpha) = 2{,}08$ м. Предел $\alpha \to 0$: $t_1 \to 0, H \to 0$ — на горизонтальной поверхности мяч, брошенный горизонтально, сразу падает.

Смысл: оси вдоль склона и по нормали превращают «расстояние до склона» в одну координату, и задача сводится к броску вверх с ускорением $g\cos\alpha$.

Ответ. 1) $V_0 = \sqrt{V_1^2 - (g\tau)^2} = 12$ м/с; 2) $t_1 = \frac{V_0\operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}7$ с; 3) $H = \frac{(V_0\sin\alpha)^2}{2g\cos\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}1$ м.