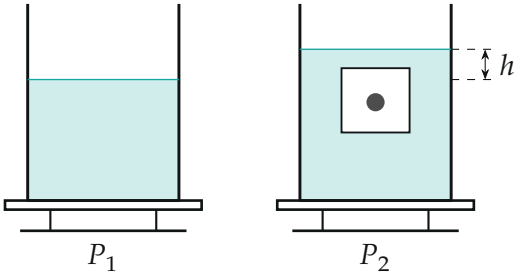
Льдинка с металлом в сосуде на весах

Задача 3. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 3] Цилиндрический сосуд с водой стоит на весах. Показание весов $P_1 = 10$ Н. В воду опустили льдинку с вмороженным в неё металлическим шариком. Уровень воды в сосуде повысился на $h = 4$ см, а льдинка стала плавать, полностью погрузившись в воду, не касаясь дна и стенок. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_1 = 0{,}9 \cdot \rho$, плотность металла $\rho_2 = 2{,}7 \cdot \rho$, площадь поперечного сечения сосуда $S = 100$ см^2. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите показание P_2 весов после погружения в сосуд льдинки.
2. Найдите массу m_1 льда.
3. Изменится ли показание весов после таяния льда? Ответ обоснуйте.



Поясняющий рисунок: сосуд на весах до и после того, как в воду опустили льдинку с шариком.

▲ **Решение. Что происходит.** Льдинка с шариком плавает внутри воды, значит, сила тяжести «льдинки с шариком» уравновешена силой Архимеда — весом вытесненной воды. Объём вытесненной воды мы знаем по подъёму уровня: hS. Это даёт и массу льдинки с шариком (пункт 1), и второе уравнение на объёмы (пункт 2). Весы показывают силу, с которой на них давит всё содержимое вместе с сосудом, поэтому пункт 3 решается законом сохранения массы.

Обозначения. V_1, m_1 — объём и масса льда; V_2, m_2 — объём и масса шарика; $M = m_1 + m_2$ — масса льдинки с шариком; $\rho_1 = 0{,}9\rho$, $\rho_2 = 2{,}7\rho$.

Пункт 1.

1. Условие плавания для тела «лёд + шарик». На него действуют сила тяжести Mg и сила Архимеда $\rho g(V_1 + V_2)$; давление воды со всех сторон и есть сила Архимеда. Тело покоится, поэтому по второму закону Ньютона в проекции на вертикаль

$$Mg = \rho g(V_1 + V_2).$$

Тело погружено целиком, и весь его объём вытеснил воду вверх: $V_1 + V_2 = hS$. Значит, $M = \rho hS = 1000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}01 = 0{,}4$ кг.

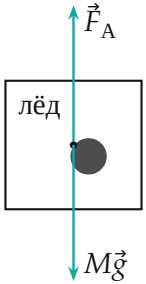
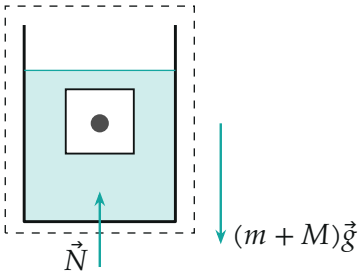


Схема «лёд + шарик»: сила тяжести и сила Архимеда равны по модулю.

2. Что показывают весы. Рассмотрим систему «сосуд + вода + льдинка с шариком». Она покоится, на неё действуют только сила тяжести и сила реакции весов $\vec{N}$; весы показывают N (сила, с которой система давит на весы, по третьему закону Ньютона равна N). До погружения $N = P_1$, после к системе добавилась масса M:

$$P_2 = P_1 + Mg = P_1 + \rho ghS = 10 + 4 = 14 \text{ Н}.$$



Система в пунктирной рамке (сосуд с водой массой m и льдинка): внешние силы — только тяжесть и реакция весов. Силы между водой и льдинкой — внутренние.

Пункт 2.

3. Два уравнения на объёмы. Из пункта 1 — объём и масса тела «лёд + шарик»:

$$V_1 + V_2 = hS, \qquad \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho h S.$$

Умножим первое на ρ_2 и вычтем второе: $(\rho_2 - \rho_1)V_1 = (\rho_2 - \rho)hS$, откуда

$$V_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} hS = \frac{1{,}7}{1{,}8} \cdot 400 \text{ см}^3 \approx 378 \text{ см}^3,$$

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho)}{\rho_2 - \rho_1} hS = \frac{0{,}9 \cdot 1{,}7}{1{,}8} \cdot 0{,}4 \text{ кг} = 0{,}34 \text{ кг}.$$

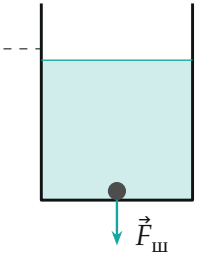
Шарику остаётся $V_2 = hS - V_1 \approx 22$ см^3 и $m_2 = M - m_1 = 0{,}06$ кг.

Пункт 3.

4. После таяния. Лёд превращается в воду той же массы, шарик тонет и ложится на дно. Масса всего, что стоит на весах, не изменилась, система снова покоится, и по пункту 2 реакция весов равна полной силе тяжести:

$$P_3 = P_1 + (m_1 + m_2)g = P_2 = 14 \text{ Н}.$$

Показание *не изменится*. Изменится другое — уровень воды. Талая вода занимает $m_1/\rho = 340$ см^3, шарик — 22 см^3; вместе 362 см^3 вместо прежних 400 см^3, и уровень опустится на $\dfrac{38 \text{ см}^3}{100 \text{ см}^2} \approx 0{,}38$ см. Давление воды на дно уменьшится, но шарик теперь сам давит на дно с силой $(m_2 - \rho V_2)g = 0{,}38$ Н — ровно столько, сколько потеряла вода ($\rho g \cdot 0{,}38$ см$\cdot S = 0{,}38$ Н).



После таяния: шарик на дне, уровень чуть ниже прежнего (пунктир слева; разница уровней увеличена). Шарик давит на дно силой $F_ш$, и полная сила давления на весы прежняя.

Обратите внимание. Весы «не знают», плавает ли что-то в воде или лежит на дне: показание определяет только полная масса на весах. А уровень воды при этом меняется — это разные вопросы.

Ответ:

$$P_2 = P_1 + \rho g h S = 14\text{ Н}, \qquad P_3 = P_2,$$

$$m_1 = \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho)}{\rho_2 - \rho_1} hS = 0{,}34\text{ кг}.$$

Проверка. Размерность m_1: $\frac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{кг/м}^3}{\text{кг/м}^3} \cdot \text{м}^3 = \text{кг}$. Предел: без шарика ($\rho_2 \to \rho$) $m_1 \to 0$ — чистый лёд в воде не может плавать целиком погружённым, так и должно быть. Второй способ для пункта 2 (python): $V_2 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} hS = 22{,}2\text{ см}^3$, $m_1 = \rho_1(hS - V_2) = 0{,}340$ кг — то же.

Смысл: подъём уровня даёт объём, условие плавания — массу, а весы чувствуют только массу.

Ответ. 1) $P_2 = P_1 + \rho g h S = 14$ Н; 2) $m_1 = \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho)}{\rho_2 - \rho_1} hS \approx 0{,}34$ кг; 3) не изменится: масса содержимого на весах прежняя.