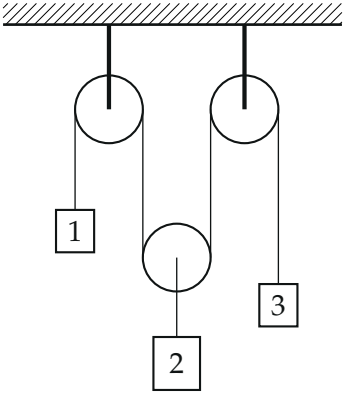
Грузы на системе блоков

Задача 4. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 4] В системе, показанной на рисунке, массы грузов равны соответственно $m_1 = m_3 = m = 0{,}1$ кг, $m_2 = 3m$. Первоначально систему удерживают, затем отпускают. Грузы приходят в движение. Начальные скорости всех грузов нулевые. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Массы блоков и нитей по сравнению с массой грузов пренебрежимо малы. Нерастяжимые нити свободно скользят по блокам.



1. Найдите скорость V_1 груза 1 в тот момент, когда груз 2 опустится на $H = 0{,}5$ м.
2. Найдите силу T_2 натяжения нити, на которой подвешен груз 2.

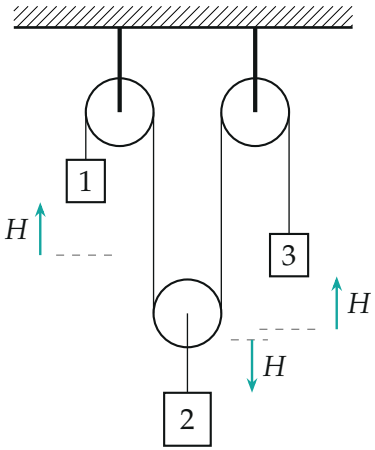
▲ **Решение.** **Что происходит.** Одна нить перекинута через два неподвижных блока и подвижный блок с грузом 2. Груз 2 тяжелее, чем грузы 1 и 3 вместе ($3m > 2m$), поэтому он опускается, а грузы 1 и 3 поднимаются. Связь «нить нерастяжима» даёт соотношение перемещений, закон сохранения энергии — скорость, второй закон Ньютона для груза 2 — натяжение.

Обозначения. Ось y — вертикально вниз от потолка; y_1, y_3 — координаты грузов 1 и 3, y_2 — координата подвижного блока (груз 2 висит на нём на нити постоянной длины). T — натяжение длинной нити, T_2 — натяжение нити груза 2, a — модуль ускорения грузов.

1. Связь движений. Длина нити — сумма вертикальных кусков (дуги на блоках постоянны):

$$L = y_1 + 2y_2 + y_3 + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_1 + 2\Delta y_2 + \Delta y_3 = 0.$$

Подвижный блок опустился на H: $\Delta y_2 = H$, значит, $\Delta y_1 + \Delta y_3 = -2H$. Грузы 1 и 3 одинаковые, на каждый действуют mg и одно и то же натяжение T (нить одна, блоки невесомые и гладкие), стартуют из покоя — значит, движутся одинаково, и каждый поднялся на H. Скорости в каждый момент тоже равны: $v_1 = v_3 = v_2$.



Пунктир — начальные уровни низа грузов 1 и 3 и верха груза 2 (справа от него); рисунок — когда груз 2 опустился на H. Грузы 1 и 3 поднялись каждый на H.

Пункт 1.

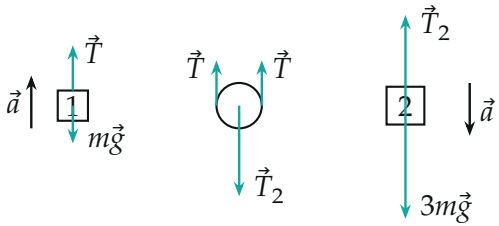
2. Закон сохранения механической энергии для системы «три груза + нить + блоки». Трения нет, нить нерастяжима, блоки и нити невесомы: работа сил натяжения на всю систему равна нулю, работают только силы тяжести. Груз 2 опустился на H, грузы 1 и 3 поднялись на H, у всех скорость V_1:

$$3mgH = mgH + mgH + \frac{(m + 3m + m)V_1^2}{2},$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gH}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{5}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

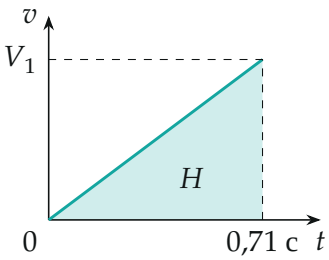
3. Схемы сил. На груз 1 (и так же на груз 3) действуют $m\vec{g}$ вниз и $\vec{T}$ вверх. На подвижный блок — два куска длинной нити вверх ($2T$) и нить груза 2 вниз (T_2); блок невесомый, поэтому $T_2 = 2T$. На груз 2 — $3m\vec{g}$ вниз и $\vec{T}_2$ вверх.



Схемы сил: груз 1 (груз 3 — так же), подвижный блок, груз 2. Длины стрелок — по расчёту: $T = 1{,}2mg$, $T_2 = 2{,}4mg$.

4. Ускорение. Движение из покоя равноускоренное (силы постоянны), поэтому $V_1^2 = 2aH$:

$$a = \frac{V_1^2}{2H} = \frac{g}{5} = 2 \text{ м/с}^2.$$



Скорость грузов растёт линейно (ускорение $g/5$); площадь под графиком — путь H. Отсюда $V_1^2 = 2aH$; время движения $\sqrt{2H/a} \approx 0{,}71$ с.

5. Второй закон Ньютона для груза 2 в проекции на ось y (вниз):

$$3mg - T_2 = 3ma \quad \Rightarrow \quad T_2 = 3m(g-a) = \frac{12}{5}mg = 2{,}4 \text{ Н}.$$

Второй способ (динамика без энергии). Для груза 1 вверх: $T - mg = ma$; для груза 2 вниз: $3mg - 2T = 3ma$. Подставим $T = m(g+a)$: $3mg - 2mg - 2ma = 3ma$, $a = g/5$ — то же. Тогда $T = 1{,}2mg = 1{,}2$ Н и $T_2 = 2T = 2{,}4$ Н.

Обратите внимание. Натяжение нити груза 2 меньше его силы тяжести ($2{,}4 < 3$ Н): груз ускоряется вниз. А связь перемещений «все по H» верна только потому, что грузы 1 и 3 одинаковы; при разных массах они двигались бы по-разному.

Ответ:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gH}{5}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ м/с}, \qquad T_2 = \frac{12}{5}mg = 2{,}4 \text{ Н}.$$

Проверка. Размерности: $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$, $\text{кг}\cdot\text{м/с}^2 = \text{Н}$. Предельный случай: при $m_2 = 2m$ те же уравнения ($T - mg = ma$, $2mg - 2T = 2ma$) дают $a = 0$ и $T_2 = 2mg$ — равновесие, как и должно быть.

Смысл: невесомый подвижный блок делит силу пополам, а одинаковые грузы на концах нити движутся одинаково.

Ответ. 1) $V_1 = \sqrt{\frac{2gH}{5}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ м/с; 2) $T_2 = \frac{12}{5}mg = 2{,}4$ Н.